普陀区 2023 学年第二学期八年级数学学科期中考试卷

（时间 90 分钟，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 以下函数中，属于一次函数的是（　　）

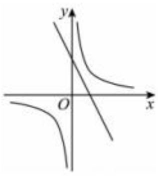
A. $y=\frac{x}{2}$　　B. $y=kx+b$（k、b 为常数）　　C. $y=c$（c 为常数）　　D. $y=\frac{2}{x}$

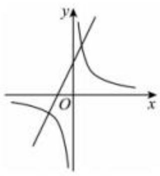
2. 一次函数 $y=-\frac{1}{5}x+3$ 的图像经过的象限是（　　）

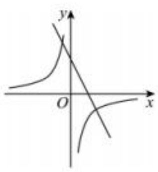
A. 第一、二、三象限　　B. 第二、三、四象限

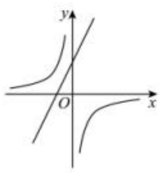
C. 第一、二、四象限　　D. 第一、三、四象限

3. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 与一次函数 $y=-kx+k$ 在同一坐标系中的大致图像是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 在Y $ABCD$ 中，AC、BD 相交于点 O，那么下列结论中，正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是相等的向量　　B. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是相等的向量

C. $\overrightarrow{BO}$ 与 $\overrightarrow{OD}$ 互为相反向量　　D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 互为相反向量

5. 点 A、B、C、D 在一个平面内，若从① $AB\,/\!/\,CD$；② $AB=CD$；③ $BC\,/\!/\,AD$；④ $BC=AD$．这四个条件中选两个，但不能推导出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的选项是（　　）

A. ①②　　B. ①④　　C. ②④　　D. ①③

6. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 对角线的交点到各边距离都相等的四边形是菱形；

B. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形；

C. 三条边相等的四边形是菱形；

D. 三个内角相等的四边形是矩形.

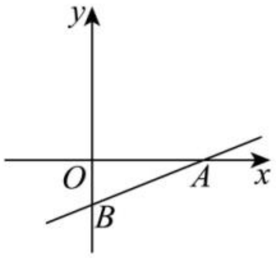
二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 直线 $y=-x-1$ 的截距是________.

8. 如果将直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 沿 y 轴向下平移 4 个单位，那么所得直线的表达式是________.

9. 如果点 $A\left(-2,a\right)$，$B\left(3,b\right)$ 都在直线 $y=-3x+3$ 上，那么 a________b（填“>”“<”或“=”）.

10. 如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(5,0)$ 与 $B(0,-2)$，那么关于 x 的不等式 $kx+b<0$ 的解集是________.



11. 在锅中倒入了一些油，用煤气灶均匀加热，每隔 20 秒测一次油温，得到下表：

时间 x（秒）	0	20	40	60	…
油温 y（℃）	10	50	90	130	…

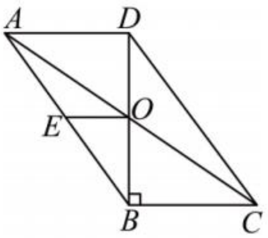
加热 110 秒时，油刚好沸腾了，估计这种油沸点的温度为_____℃.

12. 已知菱形有一个内角为 $120°$，较长对角线长为 $6\sqrt{3}$，那么较短的对角线长为________.

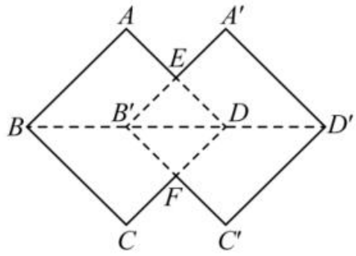
13. 已知梯形的中位线长为 12cm，上底长 6cm，那么下底的长是________cm.

14. 若一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是______.

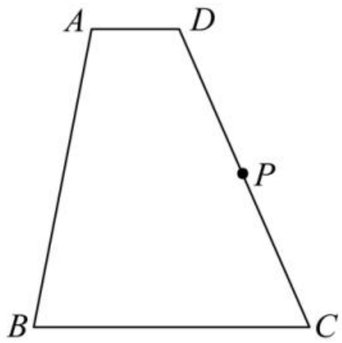
15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E 是 AB 中点，$BD\perp BC$，$AB=5$，$OE=\dfrac{3}{2}$，那么 $OC=$________.



16. “方胜”是中国古代的一种首饰，其图案由两个全等正方形相叠组成，寓意是同心吉祥．如图，如果将边长为 1 厘米的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 向右平移 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 厘米得到正方形 $A'B'C'D'$，形成一个“方胜”图案，那么“方胜”图案的周长为________厘米.



17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC, AD+BC=AB$，点 P 是 CD 的中点，如果 $AD=a$，$BC=b$，且 $b>a$，边 AB 上存在一点 Q，使 PQ 所在直线将四边形 $ABCD$ 的面积分成相等的两部分，那么 AQ 的长为________.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中，给出以下定义：对于 x 轴正半轴上的点 $M(a,0)$ 与 y 轴正半轴上的点 $P(0,b)$，如果坐标平面内存在一点 N，使得 $\angle MPN=90°$，且 $MP=NP$，那么称点 N 为 M 关于 P 的“垂转点”．例如图 1，已知点 $M(1,0)$ 和点 $P(0,1)$，以 MP 为腰作等腰直角三角形 MPN，可以得到 M 关于 P 的其中一个垂转点 $N(-1,0)$．如图 2，如果 $M(2,0)$ 关于 y 轴上一点 P 的垂转点 N 在一次函数 $y=2x-1$ 的图象上，那么垂转点 N 的坐标为________.

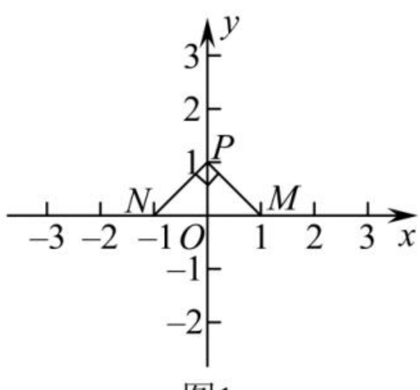


图1

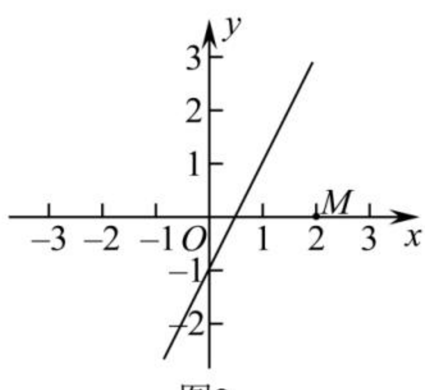
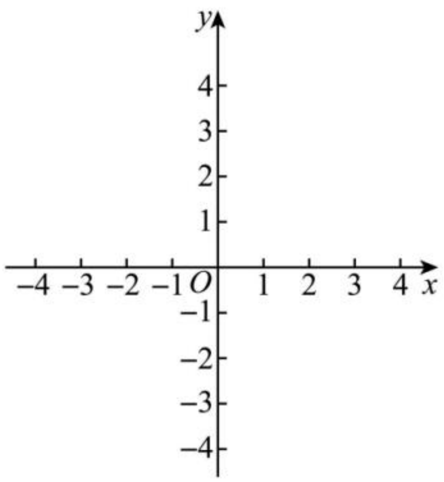


图2

三、简答题（本大题共 4 题，每题 6 分，满分 24 分）

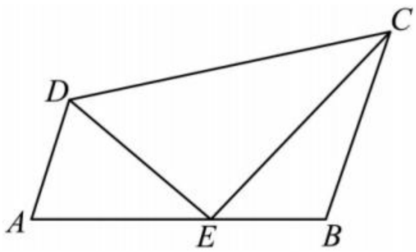
19. 已知一次函数图像与直线 $y=-\dfrac{4}{3}x+5$ 平行，且过点 $(6,-4)$．



（1）求一次函数的解析式；

（2）求该一次函数与坐标轴围成的三角形的周长.

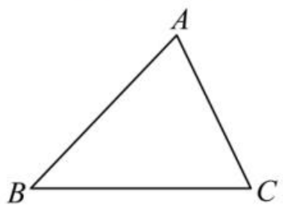
20. 如图，已知点 E 在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，设 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$.



（1）试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}=$_______，$\overrightarrow{EC}=$______.

（2）在图中求作：$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}$.（不要求写出作法，只需写出结论即可）

21. 如图，已知 $\triangle ABC$，$\angle A<90^\circ$，点 D、E、F 分别在边 AB、BC、AC 上，且四边形 $ADEF$ 是菱形.

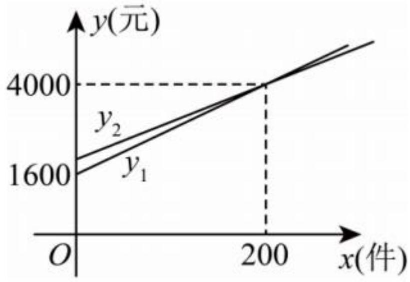


（1）请使用直尺与圆规确定点 E 的具体位置，再画出菱形 $ADEF$（不用写作法、结论，保留画图痕迹）；

（2）如果点 M（不与点 D 重合）在边 AB 上，且满足 $EM=ED$，那么四边形 $AFEM$ 的形状是________；

（3）在（2）的条件下，如果 $\angle A=60^\circ$，$AD=4$，那么四边形 $AFEM$ 的面积是________.

22. 某快递公司送货员每月的工资由底薪加计件工资两部分组成，计件工资与送货件数成正比例．有甲、乙两种薪资方案，如果送货量为 x（件）时，方案甲的月工资是 y_1（元），方案乙的月工资是 y_2（元），其中计件工资部分，方案甲每送一件货物所得比方案乙高 2 元．如图所示，已知方案甲的每月底薪是 1600 元.

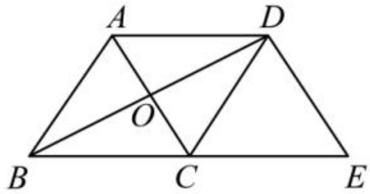


（1）根据图中信息，分别求出 y_1 和 y_2 关于 x 的函数解析式；（不必写自变量的取值范围）

（2）比较甲、乙两种薪资方案，如果你是应聘人员，你认为应该怎样选择方案？

四、解答题（本大题共 3 题，第 23 题 8 分，第 24 题 8 分，第 25 题 12 分，满分 28 分）

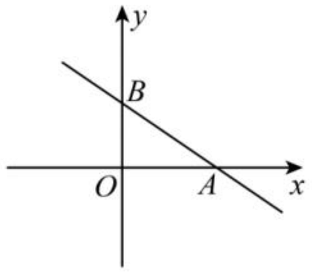
23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，$AB=CD$，$\angle BAC=\angle ACD$，延长 BC 至点 E，使 $CE=BC$，连接 DE.

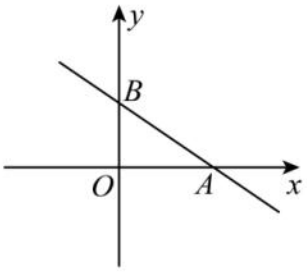


（1）当 $AC\perp BD$ 时，求证：$BE=2CD$；

（2）当 $AC\perp BC$，且 $CE=2CO$ 时，求证：四边形 $ACED$ 是正方形.

24. 如图，在平面直角坐标系中，函数 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ 的图象分别交 x 轴，y 轴于 A，B 两点，过点 B 的直线 BM 交 x 轴正半轴于点 M，且直线 BM 把 $\triangle AOB$ 分成面积之比为 $1:2$ 的两部分.





备用图

（1）求点 A，B 的坐标；

（2）求直线 BM 的表达式；

（3）当 $OM<MA$ 时，试在直线 BM 上找一点 P，使得 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle AOB}$，直接写出点 P 的坐标.

25. 小普同学在折叠平行四边形纸片的过程中发现：如果把平行四边形沿指它的一条对角线翻折，会得到很多结论．例如：在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB\neq BC$，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折至 $\triangle AEC$，连接 DE，可以得到 $AC\,//\,DE$.

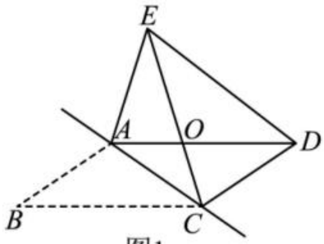


图1

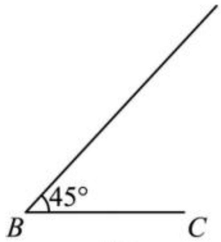


图2

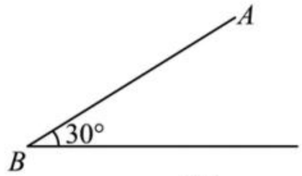


图3

（1）如图 1，如果 AD 与 CE 相交于点 O，求证 $AC // DE$；

（2）如图 2，如果 $\angle B=45°$，$BC=2$，当 A、C、D、E 为顶点的四边形是矩形时，求出 AC 的长；

（3）如图 3，如果 $\angle B=30°$，$AB=3$，当 $\triangle AED$ 是直角三角形时，直接写出 BC 的长．

普陀区 2023 学年第二学期八年级数学学科期中考试卷

（答案解析）

（时间 90 分钟，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 以下函数中，属于一次函数的是（　　）

A. $y=\frac{x}{2}$　　　　B. $y=kx+b$（k、b 为常数）　　　　C. $y=c$（c 为常数）　D. $y=\frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数定义：形如 $y=kx+b$（$k\neq0$，k、b 是常数）的函数，叫做一次函数进行分析即可．

【详解】解：A、是一次函数，故 A 正确；

B、$k=0$ 时，不是一次函数，故 B 错误；

C、不含一次项，不是一次函数，故 C 错误；

D、不是整式，不是一次函数，故 D 错误．

故选：A．

【点睛】本题主要考查的是一次函数的定义，掌握一次函数的定义是解题的关键．

2. 一次函数 $y=-\frac{1}{5}x+3$ 的图像经过的象限是（　　）

A. 第一、二、三象限　　　　B. 第二、三、四象限

C. 第一、二、四象限　　　　D. 第一、三、四象限

【答案】C

【解析】

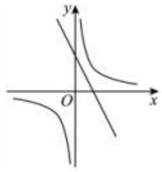
【分析】本题考查了一次函数的图象，根据一次函数的解析式的系数 $k=-\frac{1}{5}<0$，$b=3>0$，进而可得答案，熟练掌握理解一次函数的系数与函数图象所经过的象限的关系是解题的关键．

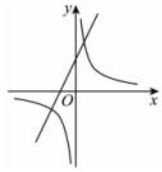
【详解】解：$\because k=-\frac{1}{5}<0$，$b=3>0$，

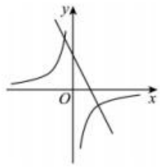
$\therefore$ 一次函数 $y=-\frac{1}{5}x+3$ 的图像经过的象限是第一、二、四象限，

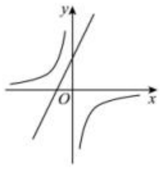
故选 C．

3. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 与一次函数 $y=-kx+k$ 在同一坐标系中的大致图像是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是反比例函数的图象和一次函数的图象，根据一次函数图象与反比例函数图象与系数的关系逐一判断即可求解，熟悉两函数图象的分布与其解析式中对应系数的关系是解题的关键.

【详解】解：A、由反比例函数得 $k>0$，由一次函数得 $-k<0$，即 $k>0$，则正确，故符合题意；

B、由反比例函数得 $k>0$，由一次函数得 $-k>0$，即 $k<0$，则错误，故不符合题意；

C、由反比例函数得 $k<0$，由一次函数得 $-k<0$，即 $k>0$，则错误，故不符合题意；

D、由反比例函数得 $k<0$，由一次函数得 $-k>0$，即 $k<0$，则一次函数应交 y 轴负半轴，则错误，故不符合题意；

故选 A.

4. 在Y $ABCD$ 中，AC、BD 相交于点 O，那么下列结论中，正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是相等的向量　　B. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是相等的向量

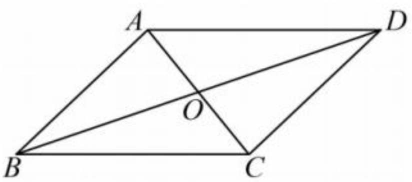
C. $\overrightarrow{BO}$ 与 $\overrightarrow{OD}$ 互为相反向量　　D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 互为相反向量

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质，相等向量与相反向量的定义．解题的关键是熟记相等向量与相反向量的定义.

【详解】解：如图，



A．$\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是相反的向量，故该选项错误，不符合题意；

B．$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是相反的向量，故该选项错误，不符合题意；

C．$\overrightarrow{BO}$与$\overrightarrow{OD}$是相等的向量，故该选项错误，不符合题意；

D．$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$互为相反向量，故该选项正确，符合题意．

故选 D．

5. 点A、B、C、D在一个平面内，若从①$AB \parallel CD$；②$AB = CD$；③$BC \parallel AD$；④$BC = AD$．这四个条件中选两个，但不能推导出四边形$ABCD$是平行四边形的选项是（　　）

A. ①②　　　　B. ①④　　　　C. ②④　　　　D. ①③

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定方法逐一分析即可．

【详解】解：两组对边分别平行的四边形是平行四边形，可选①③；故 D 不符合题意；

两组对边分别相等的四边形是平行四边形，可选②④；故 C 不符合题意；

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，可选①②或③④；故 A 不符合题意；

一组对边平行另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形．故 B 符合题意；

故选 B．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定，熟练掌握判定定理是解题的关键．平行四边形共有五种判定方法，记忆时要注意技巧；这五种方法中，一种与对角线有关，一种与对角有关，其他三种与边有关．

6. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 对角线的交点到各边距离都相等的四边形是菱形；

B. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形；

C. 三条边相等的四边形是菱形；

D. 三个内角相等的四边形是矩形．

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了判断命题的真假、菱形、正方形及矩形的判定，根据菱形、正方形及矩形的判定逐一判断即可求解，熟练掌握菱形、正方形及矩形的判定是解题的关键．

【详解】解：A、对角线的交点到各边距离都相等的四边形是菱形，正确，是真命题，符合题意；

B、对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故原命题错误，是假命题，故不符合题意；

C、四条边相等的四边形是菱形，故原命题错误，是假命题，故不符合题意；

D、三个内角是直角的四边形是矩形，故原命题错误，是假命题，故不符合题意；

故选 A．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 直线 $y=-x-1$ 的截距是________．

【答案】-1

【解析】

【分析】本题考查一次函数的截距，根据一次函数的截距即为一次函数图象与 y 轴交点的纵坐标即可解答，也是解题关键．

【详解】解：对于 $y=-x-1$，令 $x=0$，得：$y=-1$，

$\therefore$ 直线 $y=-x-1$ 的截距是 -1．

故答案为：-1．

8. 如果将直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 沿 y 轴向下平移 4 个单位，那么所得直线的表达式是________．

【答案】$y=-\frac{1}{2}x-2$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的平移，平移规律为：上加下减，左加右减，直接根据“上加下减”的法则进行解答即可．

【详解】解：将直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 沿 y 轴向下平移 4 个单位，那么所得直线的表达式是 $y=-\frac{1}{2}x+2-4$，

即 $y=-\frac{1}{2}x-2$．

故答案为：$y=-\frac{1}{2}x-2$．

9. 如果点 $A(-2,a)$，$B(3,b)$ 都在直线 $y=-3x+3$ 上，那么 a________b（填“>”“<”或“=”）．

【答案】$>$

【解析】

【分析】本题考查一次函数图象上的点的坐标特征，掌握函数图象上的点的坐标满足其解析式是解题关键．分别将点 $A(-2,a)$，$B(3,b)$ 代入 $y=-3x+3$，即可求出 a 和 b 的值，再比较即可．

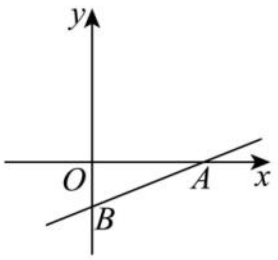
【详解】解：$\because$ 点 $A(-2,a)$，$B(3,b)$ 都在直线 $y=-3x+3$ 上，

$\therefore a=-3\times(-2)+3=9$，$b=-3\times3+3=-6$，

$\therefore a>b$.

故答案为：>.

10. 如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(5,0)$ 与 $B(0,-2)$，那么关于 x 的不等式 $kx+b<0$ 的解集是________.



【答案】$x<5$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式，由直线与 x 轴的交点坐标即可求解，理解一次函数与坐标轴的交点坐标与一元一次不等式的解集的关系是解题的关键.

【详解】解：$\because A(5,0)$，

$\therefore kx+b<0$ 的解集是 $x<5$，

故答案为：$x<5$.

11. 在锅中倒入了一些油，用煤气灶均匀加热，每隔 20 秒测一次油温，得到下表：

时间 x（秒）	0	20	40	60	…
油温 y（℃）	10	50	90	130	…

加热 110 秒时，油刚好沸腾了，估计这种油沸点的温度为_____℃.

【答案】230

【解析】

【分析】根据表格中的数据，可以得到 y 与 x 的函数关系式，然后即可得到当 t=110 时对应的 y 的值，从而可以解答本题.

【详解】解：由表格中的数据可得，每 20 秒钟，油温升高 40℃，

则 $y=10+（40\div20）t=10+2t$,

当 $t=110$ 时，$y=10+2\times110=10+220=230$，

故答案为：230.

【点睛】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质解答.

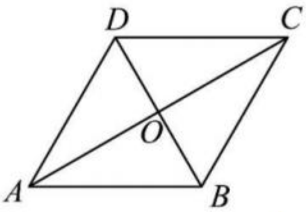
12. 已知菱形有一个内角为$120°$，较长对角线长为$6\sqrt{3}$，那么较短的对角线长为________.

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查菱形的性质，含 30 度角的直角三角形的性质，勾股定理．掌握菱形的性质是解题关键．根据题意和菱形的性质得出$\angle ADB=60°$，$OA=3\sqrt{3}$，$DO=\frac{1}{2}BD$，$AC\perp BD$，从而得出$\angle DAO=30°$，结合含度角的直角三角形的性质，得出$DA=2DO$，再根据勾股定理求解即可.

【详解】解：如图菱形$ABCD$，$\angle ADC=120°$，$AC=6\sqrt{3}$，



$\therefore \angle ADB=\angle CDB=\frac{1}{2}\angle ADC=60°$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=3\sqrt{3}$，$DO=OB=\frac{1}{2}BD$，$AC\perp BD$，

$\therefore \angle DAO=30°$，

$\therefore DA=2DO$.

$\because DA^2=DO^2+AO^2$，

$\therefore (2DO)^2=DO^2+AO^2$，即$(2DO)^2=DO^2+(3\sqrt{3})^2$，

$\therefore DO=3$，

$\therefore BD=2DO=6$.

故答案为：6.

13. 已知梯形的中位线长为12cm，上底长6cm，那么下底的长是________cm.

【答案】18

【解析】

【分析】本题考查了梯形的中位线定理，解题的关键是熟悉梯形的中位线与上底和下底的数量关系．根据梯形的中位线定理“梯形中位线的长等于上底与下底和的一半”，即可求解.

【详解】解：根据梯形的中位线定理，得：梯形的下底＝中位线的 2 倍－上底.

即梯形的下底$=12\times2-6=18\text{cm}$.

故答案为：18.

14. 若一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是______.

【答案】8

【解析】

【分析】根据多边形的内角和定理，多边形的内角和等于（$n-2$）•180°，外角和等于 360°，然后列方程求解即可.

【详解】解：设边数为 n，由题意得，

180（$n-2$）=360×3，

解得 n=8.

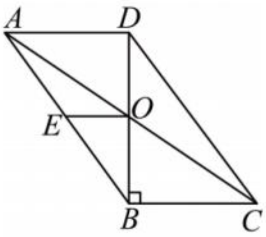
所以这个多边形的边数是 8.

故答案为：8.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和公式与外角和定理，根据题意列出方程是解题的关键.

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E 是 AB 中点，

$BD \perp BC$，$AB=5$，$OE=\dfrac{3}{2}$，那么 $OC=$________.



【答案】$\sqrt{13}$

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质，三角形中位线定理，勾股定理，平行线的性质．熟记性质与定理是解题的关键．根据平行四边形的性质结合题意，由三角形中位线定理可求出 $AD=2OE=3$，再根据平行线的性质得出 $BD \perp AD$，最后利用勾股定理求解即可.

【详解】解：∵在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，

$\therefore OB=OD=\dfrac{1}{2}BD$，$OC=OA$，$AD \parallel BC$.

∵点 E 是 AB 中点，

$\therefore AD=2OE=3$.

$\because BD \perp BC$，

$\therefore BD \perp AD$，

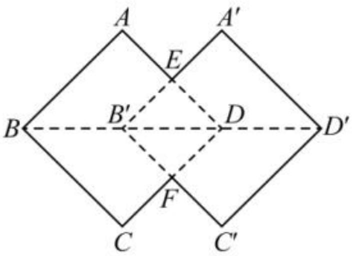
$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4$，

$\therefore OD=\frac{1}{2}BD=2$，

$\therefore OC=OA=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{13}$．

故答案为：$\sqrt{13}$．

16.“方胜”是中国古代的一种首饰，其图案由两个全等正方形相叠组成，寓意是同心吉祥．如图，如果将边长为1厘米的正方形$ABCD$沿对角线BD向右平移$\frac{\sqrt{2}}{2}$厘米得到正方形$A'B'C'D'$，形成一个“方胜”图案，那么“方胜”图案的周长为________厘米．



【答案】6

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质，平移的性质，勾股定理．掌握正方形和平移的性质是解题关键．由正方形和平移的性质可求出$BB'=DD'=B'D=\frac{\sqrt{2}}{2}$厘米，$\angle B'ED=90°$，$B'E=DE$．进而由勾股定理可求出$B'E=DE=\frac{1}{2}$厘米，即得出$AE=A'E=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$厘米．同理可求$CF=C'F=\frac{1}{2}$厘米．最后求其周长即可．

【详解】解：∵正方形$ABCD$的边长为1厘米，

$\therefore BD=\sqrt{2}$厘米，$\angle ADB=45°$．

由平移可知$BB'=DD'=\frac{\sqrt{2}}{2}$厘米，$\angle A'B'D=45°$，

$\therefore B'D=BD-BB'=\frac{\sqrt{2}}{2}$厘米，$\angle B'ED=90°$，$B'E=DE$．

$\because B'E^2+DE^2=B'D^2$，

$\therefore B'E = DE = \dfrac{1}{2}$厘米，

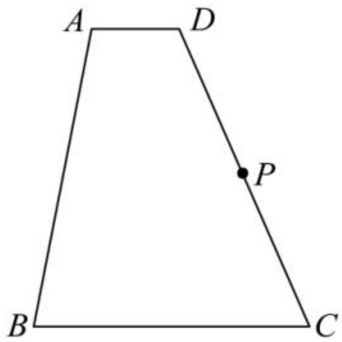
$\therefore AE = A'E = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$厘米.

同理可求$CF = C'F = \dfrac{1}{2}$厘米.

$\therefore$“方胜”图案的周长为$AB + BC + A'D' + C'D' + AE + A'E + CF + C'F = 6$厘米.

故答案为：6.

17. 如图，在四边形$ABCD$中，$AD \parallel BC, AD + BC = AB$，点$P$是$CD$的中点，如果$AD = a$，$BC = b$，且$b>a$，边$AB$上存在一点$Q$，使$PQ$所在直线将四边形$ABCD$的面积分成相等的两部分，那么$AQ$的长为________.

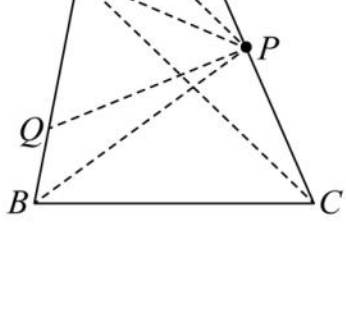


【答案】b

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，全等三角形的性质与判定，三角形内角和定理，等边对等角；在AB上截取$AE = AD$，连接DE, PE, CE, BP, PQ，先证明$\triangle AEP \cong \triangle ADP(\text{SSS})$，$\triangle PBE \cong \triangle PBC(\text{SSS})$，设$S_{\triangle AEP} = S_{\triangle ADP} = S_1$，$S_{\triangle PBE} = S_{\triangle PBC} = S_2$，根据题意得出$S_{\triangle PBQ} = S_1 = S_{\triangle AEP}$则$BQ = AE = a$，即可求解.

【详解】解：如图所示，在AB上截取$AE = AD$，连接DE, PE, CE, BP, PQ，



$\because$ 在四边形 $ABCD$ 中，$AD // BC, AD+BC=AB$，

$\therefore \angle DAB+\angle ABC=180^\circ$，$BE=AB-AE=BA-AD=a+b-a=b=BC$，

$\because AD=AE, BE=BC$，

$\therefore \angle AED=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAD), \angle BEC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)$

$\therefore \angle DEC=180^\circ-\angle AED-\angle BEC=90^\circ$

$\because P$ 是 DC 的中点，

$\therefore PE=PD=PC$，

在 $\triangle AEP, \triangle ADP$ 中，

$$\begin{cases} AD=AE \\ PE=PD \\ AP=AP \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEP \cong \triangle ADP(\mathrm{SSS})$，

$\therefore S_{\triangle AEP}=S_{\triangle ADP}$

在 $\triangle PBE, \triangle PBC$ 中，

$$\begin{cases} PE=PC \\ BE=BC \\ PB=PC \end{cases}$$

$\therefore \triangle PBE \cong \triangle PBC(\mathrm{SSS})$，

$\therefore S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PBC}$，

设 $S_{\triangle AEP}=S_{\triangle ADP}=S_1$，$S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PBC}=S_2$，

则四边形 $ABCD$ 的面积为 $2(S_1+S_2)$

$\because PQ$ 所在直线将四边形 $ABCD$ 的面积分成相等的两部分，

$\therefore S_{\text{四边形}BPCQ}=S_1+S_2=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PBQ}=S_2+S_{\triangle PBQ}$

$\therefore S_{\triangle PBQ}=S_1=S_{\triangle AEP}$

$\therefore BQ=AE=a$

$\therefore AQ = AB - BQ = a + b - a = b$，

故答案为：b．

18．在平面直角坐标系 xOy 中，给出以下定义：对于 x 轴正半轴上的点 $M(a,0)$ 与 y 轴正半轴上的点 $P(0,b)$，如果坐标平面内存在一点 N，使得 $\angle MPN = 90°$，且 $MP = NP$，那么称点 N 为 M 关于 P 的"垂转点"．例如图 1，已知点 $M(1,0)$ 和点 $P(0,1)$，以 MP 为腰作等腰直角三角形 MPN，可以得到 M 关于 P 的其中一个垂转点 $N(-1,0)$．如图 2，如果 $M(2,0)$ 关于 y 轴上一点 P 的垂转点 N 在一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象上，那么垂转点 N 的坐标为________．

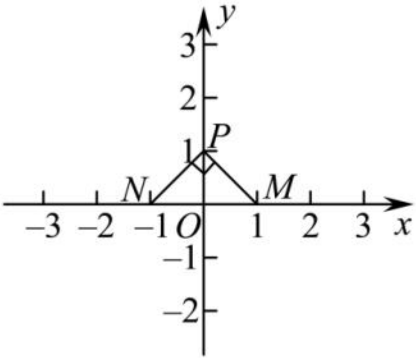


图1

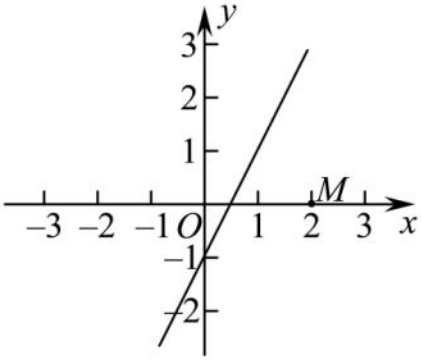


图2

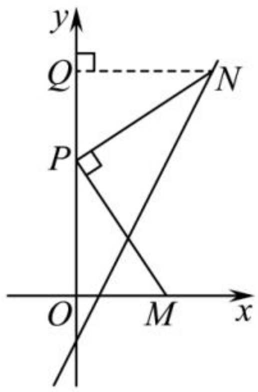
【答案】$N(3,5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的性质与判定，旋转的性质，坐标与图形，一次函数的性质；分两种情况讨论，将 PM，分别绕点 P 顺时针和逆时针旋转 $90°$，点 N 在 $y = 2x - 1$ 上，进而根据全等三角形的性质求得点 N 的坐标，即可求解．

【详解】解：如图所示，将 PM 绕点 P 逆时针旋转 $90°$，N 点在 $y = 2x - 1$ 上时，

过点 N 作 $NQ \perp y$ 轴于点 Q，



依题意，$PM=PN,\angle MPN=90^{\circ}$

又$\angle POM=\angle NQP=90^{\circ}$

$\therefore\angle QPN=90^{\circ}-\angle OPM=\angle OMP$

$\therefore\triangle QPN\cong\triangle OMP$

$\therefore OM=QP,QN=OP$

$\because M(2,0)$，则$OP=OM=2$

设$P\left(0,p\right)$，则$Q\left(0,p+2\right)$，

$\therefore N\left(p,p+2\right)$

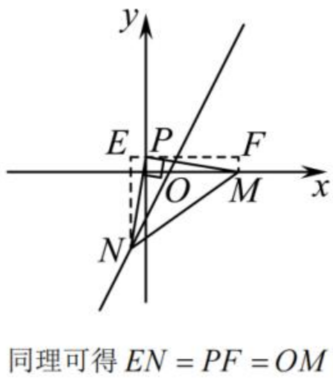
又$\because N$在$y=2x-1$上，

$\therefore p+2=2p-1$

解得：$p=3$

$\therefore N\left(3,5\right)$；

如图所示，将PM绕点P顺时针旋转90°，N点在$y=2x-1$上时，



同理可得$EN=PF=OM=2$，$FM=OP=p$

$\therefore N\left(-p, p-2\right)$

又$\because N$ 在 $y=2x-1$上，

$\therefore p-2=-2p-1$

解得：$p=\dfrac{1}{3}$

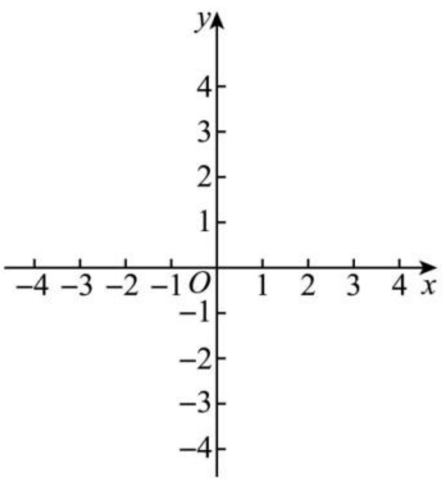
$\therefore N\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$

综上所述，$N\left(3,5\right)$或$N\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$

故答案为：$N\left(3,5\right)$或$N\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$.

三、简答题（本大题共 4 题，每题 6 分，满分 24 分）

19. 已知一次函数图像与直线 $y=-\dfrac{4}{3}x+5$ 平行，且过点$(6,-4)$.



（1）求一次函数的解析式；

（2）求该一次函数与坐标轴围成的三角形的周长.

【答案】（1）$y=-\dfrac{4}{3}x+4$

（2）12

【解析】

【分析】本题考查了待定系数法求解析式，勾股定理，求一次函数与坐标轴交点，数形结合是解题的关键.

（1）待定系数法求解析式即可求解；

（2）根据（1）的结论作图，求得直线与坐标轴的交点，勾股定理求得 AB，进而即可求解.

【小问 1 详解】

解：由一次函数图像与直线 $y=-\frac{4}{3}x+5$ 平行，

设一次函数的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+b$，把点 $(6,-4)$ 代入，

可得 $-\frac{4}{3}\times 6+b=-4$，解得 $b=4$，

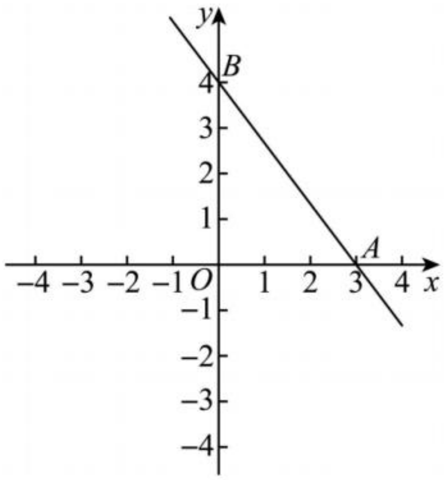
$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$；

【小问 2 详解】

解：由 $y=-\frac{4}{3}x+4$，令 $x=0$，解得 $y=4$

令 $y=0$，解得 $x=3$

如图，设一次函数与 x，y 轴分别交于点 A,B，则 $A(3,0),B(0,4)$

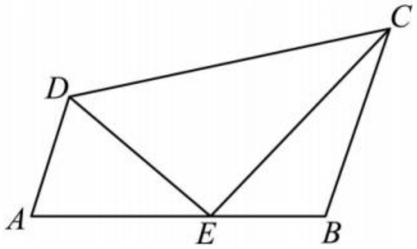


$\therefore OA=3,OB=4$

$\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore$ 一次函数图像与坐标轴围成的三角形的周长为 $OA+OB+AB=3+4+5=12$.

20. 如图，已知点 E 在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，设 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$.



（1）试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}=$_______，$\overrightarrow{EC}=$______.

（2）在图中求作：$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}$．（不要求写出作法，只需写出结论即可）

【答案】（1）$-\vec{b}+\vec{a}$，$\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$

（2）见解析

【解析】

【分析】本题考查作图—复杂作图，平面向量，三角形法则．解题的关键是熟练掌握三角形法则．

（1）直接利用三角形法则求解即可；

（2）由三角形法则可得：$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，即直接画出$\overrightarrow{AC}$即可．

【小问1详解】

解：∵$\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$，

∴$\overrightarrow{DA}=-\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{b}+\vec{a}$，

∴$\overrightarrow{ED}=-\left(-\vec{b}+\vec{a}\right)=\vec{b}-\vec{a}$，

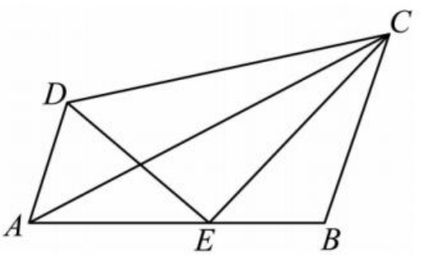
∴$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$．

故答案为：$-\vec{b}+\vec{a}$，$\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$；

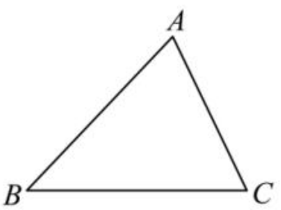
【小问2详解】

解：∵$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，

∴如图，$\overrightarrow{AC}$即为所作．



21. 如图，已知$\triangle ABC$，$\angle A<90^\circ$，点D、E、F分别在边AB、BC、AC上，且四边形$ADEF$是菱形．



（1）请使用直尺与圆规确定点E的具体位置，再画出菱形$ADEF$（不用写作法、结论，保留画图痕迹）；

（2）如果点 M（不与点 D 重合）在边 AB 上，且满足 $EM=ED$，那么四边形 $AFEM$ 的形状是________；

（3）在（2）的条件下，如果 $\angle A=60°$，$AD=4$，那么四边形 $AFEM$ 的面积是________.

【答案】（1）见解析　（2）等腰梯形

（3）$12\sqrt{3}$

【解析】

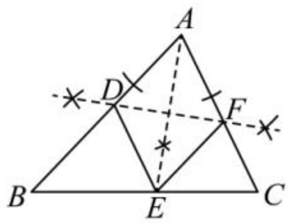
【分析】（1）作 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 E，作 AE 的垂直平分线交 AB，AC 于点 D，F；

（2）结合菱形的性质和题意可得出 $AF=EM$，$EF\parallel AM$，即说明四边形 $AFEM$ 为等腰梯形；

（3）由题可证 $\triangle ADF$，$\triangle DEF$，$\triangle DEM$ 都为等边三角形，且边长都为 4，再根据等边三角形的性质求面积即可.

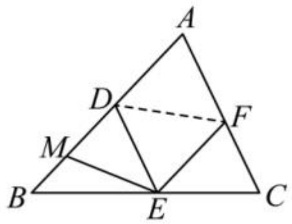
【小问 1 详解】

解：如图，菱形 $ADEF$ 即为所作；



【小问 2 详解】

解：如图，$EM=ED$.



由（1）可知四边形 $ADEF$ 为菱形，

$\therefore AF=DE$，$EF\,/\!/\,AD$，

$\therefore AF=EM$，$EF\parallel AM$，

$\therefore$四边形 $AFEM$ 为等腰梯形.

故答案为：等腰梯形；

【小问 3 详解】

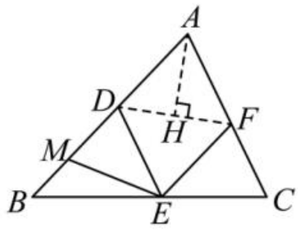
解：$\because$四边形 $ADEF$ 为菱形，四边形 $AFEM$ 为等腰梯形，

$\therefore AD=AF=DE=EF=EM$.

$\because \angle A=60°$，

$\therefore \triangle ADF$，$\triangle DEF$，$\triangle DEM$ 都为等边三角形，且边长都为 4.

如图，过点 A 作 $AH \perp DF$ 于点 H.



$\because \triangle ADF$ 为等边三角形，

$\therefore \angle DAH = 30^\circ$，$DF = AD = 4$，

$\therefore DH = HF = \frac{1}{2}AD = 2$，

$\therefore AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 2\sqrt{3}$，

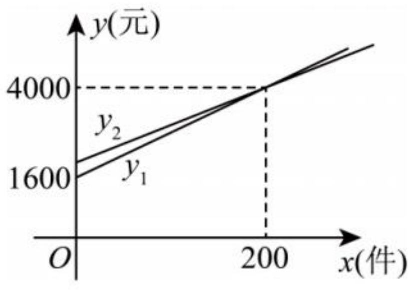
$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DEM} = S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}DF \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$，

$\therefore S_{等腰梯形AFEM} = S_{\triangle DEM} + S_{\triangle DEM} + S_{\triangle ADF} = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

故答案为：$12\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查作图—角平分线，作图—线段垂直平分线，菱形的性质，等腰梯形的判定，等边三角形的判定和性质．利用数形结合的思想是解题关键.

22. 某快递公司送货员每月的工资由底薪加计件工资两部分组成，计件工资与送货件数成正比例．有甲、乙两种薪资方案，如果送货量为 x（件）时，方案甲的月工资是 y_1（元），方案乙的月工资是 y_2（元），其中计件工资部分，方案甲每送一件货物所得比方案乙高 2 元．如图所示，已知方案甲的每月底薪是 1600 元.



（1）根据图中信息，分别求出 y_1 和 y_2 关于 x 的函数解析式；（不必写自变量的取值范围）

（2）比较甲、乙两种薪资方案，如果你是应聘人员，你认为应该怎样选择方案？

【答案】（1）$y_1 = 12x + 1600$；$y_2 = 10x + 2000$

（2）当送货量小于 200 件时，$y_2 > y_1$，则选择乙方案；

当送货量为 200 件时，$y_2 = y_1$，则两种方案都可以；

当送货量大于 200 件时，$y_2 < y_1$，则选择甲方案

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用、待定系数法求函数解析式：

（1）由图可设 y_1 关于 x 的函数解析式为 $y_1 = kx + 1600$，利用待定系数法求得 $y_1 = 12x + 1600$，再根据每送一件货物，甲所得的工资比乙高 2 元，而每送一件货物，甲所得的工资是 12 元，则可得每送一件货物，乙所得的工资比乙高 10 元，则可设 $y_2 = 10x + b$，利用待定系数法即可求解；

（2）由图知，分三种情况：当送货量小于 200 件时，$y_2 > y_1$；当送货量为 200 件时，$y_2 = y_1$；当送货量大于 200 件时，$y_2 < y_1$，进而可求解；

熟练掌握待定系数法求函数解析式是解题的关键．

【小问 1 详解】

解：由图可设 y_1 关于 x 的函数解析式为 $y_1 = kx + 1600$，将 $(200, 4000)$ 代入，

得：$4000 = 200k + 1600$，

解得：$k = 12$，

$\therefore y_1$ 关于 x 的函数解析式为 $y_1 = 12x + 1600$；

∵每送一件货物，甲所得的工资比乙高 2 元，而每送一件货物，甲所得的工资是 12 元，

∴每送一件货物，乙所得的工资比乙高 10 元．

可设 y_2 关于 x 的函数解析式为 $y_2 = 10x + b$，将 $(200, 4000)$ 代入，

得：$4000 = 10 \times 200 + b$，

解得：$b = 2000$，

$\therefore y_2$ 关于 x 的函数解析式为 $y_2 = 10x + 2000$．

【小问 2 详解】

由图知：

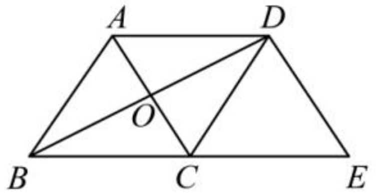
当送货量小于 200 件时，$y_2 > y_1$，则选择乙方案；

当送货量为 200 件时，$y_2 = y_1$，则两种方案都可以；

当送货量大于 200 件时，$y_2 < y_1$，则选择甲方案.

四、解答题（本大题共 3 题，第 23 题 8 分，第 24 题 8 分，第 25 题 12 分，满分 28 分）

23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，$AB = CD$，$\angle BAC = \angle ACD$，延长 BC 至点 E，使 $CE = BC$，连接 DE.



（1）当 $AC \perp BD$ 时，求证：$BE = 2CD$；

（2）当 $AC \perp BC$，且 $CE = 2CO$ 时，求证：四边形 $ACED$ 是正方形.

【答案】（1）见解析　（2）见解析

【解析】

【分析】本题考查平行线的判定，特殊四边形的判定和性质，掌握特殊四边形的判定定理和性质定理是解题关键.

（1）根据平行线的性质可证 $BA \parallel CD$，结合题意可证四边形 $ABCD$ 为菱形，即得出 $BC = CD$，再结合 $CE = BC$，即得出 $BE = 2CD$；

（2）由（1）可知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，即得出 $OA = OC$，$AD \parallel BE$，$AD = BC$．再结合题意即证明四边形 $ACED$ 是正方形.

【小问 1 详解】

证明：$\because \angle BAC = \angle ACD$，

$\therefore BA \parallel CD$.

$\because AB = CD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\because AC \perp BD$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为菱形，

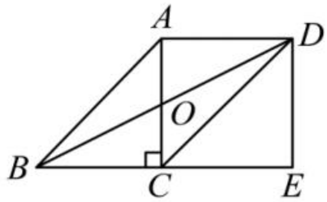
$\therefore BC = CD$.

$\because CE = BC$，

$\therefore BE = 2CD$；

【小问 2 详解】

证明：如图，$AC \perp BC$，$CE = 2CO$，



由（1）可知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore OA=OC$，$AD \parallel BE$，$AD=BC$．

$\because CE=BC$，

$\therefore AD=CE$，

$\therefore$四边形 $ADEC$ 为平行四边形．

$\because CE=2CO$，

$\therefore CE=AC$，

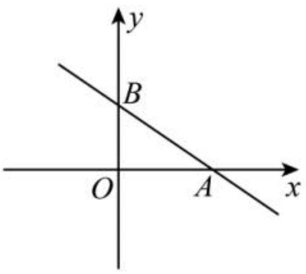
$\therefore$平行四边形 $ACED$ 为菱形．

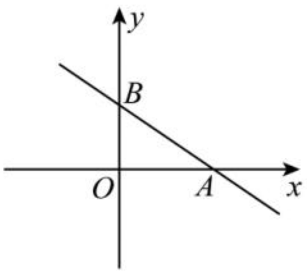
$\because AC\perp BC$，

$\therefore \angle ACE=90^\circ$，

$\therefore$菱形 $ACED$ 为正方形．

24. 如图，在平面直角坐标系中，函数 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ 的图象分别交 x 轴，y 轴于 A，B 两点，过点 B 的直线 BM 交 x 轴正半轴于点 M，且直线 BM 把 $\triangle AOB$ 分成面积之比为 $1:2$ 的两部分．





备用图

（1）求点 A，B 的坐标；

（2）求直线 BM 的表达式；

（3）当 $OM<MA$ 时，试在直线 BM 上找一点 P，使得 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle AOB}$，直接写出点 P 的坐标．

【答案】（1）$A(3,0)$，$B(0,2)$

（2）$y=-2x+2$ 或 $y=-x+2$

（3）$\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$ 或 $\left(-\dfrac{3}{2},5\right)$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的综合应用，利用数形结合的思想是解题关键.

（1）对于 $y=-\frac{2}{3}x+2$，分别令 $x=0$ 和 $y=0$，求出 y 值和 x 值，即得出答案；

（2）结合（1）可求出 $S_{\triangle OAB}=3$，由题意可知 $S_{\triangle OBM}=\frac{1}{3}S_{\triangle OAB}=1$ 或 $S_{\triangle OBM}=\frac{2}{3}S_{\triangle OAB}=2$．设 $M(t,0)$，直线 BM 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，即得出 $OM=t$．分类讨论：当 $S_{\triangle OBM}=1$ 时和当 $S_{\triangle OBM}=2$ 时，分别列方程求出 t 的值，再利用待定系数法求解即可；

（3）由题意结合（2）可知直线 BM 的解析式为 $y=-2x+2$．过点 P 作 x 轴垂线，交直线 AB 于点 C．设 $P(a,-2a+2)$，则 $C\left(a,-\frac{2}{3}a+2\right)$，即可求出 $PC=\left|\frac{4}{3}a\right|$，再根据三角形面积公式可求出 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}CP\cdot(x_A-x_B)=|2a|=3$，可求得 $a=\pm\frac{3}{2}$，再分别求出 y_P 即可.

【小问 1 详解】

解：对于 $y=-\frac{2}{3}x+2$，令 $x=0$，则 $y=2$，

$\therefore B(0,2)$；

令 $y=0$，则 $-\frac{2}{3}x+2=0$，

解得：$x=3$，

$\therefore A(3,0)$；

【小问 2 详解】

解：$\because A(3,0)$，$B(0,2)$，

$\therefore OA=3$，$OB=2$，

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OB\cdot OA=3$.

$\because$ 过点 B 的直线 BM 交 x 轴正半轴于点 M，且直线 BM 把 $\triangle AOB$ 分成面积之比为 $1:2$ 的两部分，

$\therefore S_{\triangle OBM}=\frac{1}{3}S_{\triangle OAB}=1$ 或 $S_{\triangle OBM}=\frac{2}{3}S_{\triangle OAB}=2$.

设 $M(t,0)$，直线 BM 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

$\therefore OM=t$.

当 $S_{\triangle OBM}=1$ 时，即 $\frac{1}{2}OM\cdot OB=\frac{1}{2}t\times 2=1$，

解得：$t=1$．

$\therefore OM=1$，即 $M(1,0)$．

将 $B(0,2)$，$M(1,0)$ 代入 $y=kx+b(k\neq 0)$，

得：$\begin{cases}2=b\\0=k+b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-2\\b=2\end{cases}$，

$\therefore$此时直线 BM 的解析式为 $y=-2x+2$；

当 $S_{\triangle OBM}=2$ 时，即 $\frac{1}{2}OM\cdot OB=\frac{1}{2}t\times 2=2$，

解得：$t=2$．

$\therefore OM=2$，即 $M(2,0)$．

将 $B(0,2)$，$M(2,0)$ 代入 $y=kx+b(k\neq 0)$，

得：$\begin{cases}2=b\\0=2k+b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-1\\b=2\end{cases}$，

$\therefore$此时直线 BM 的解析式为 $y=-x+2$．

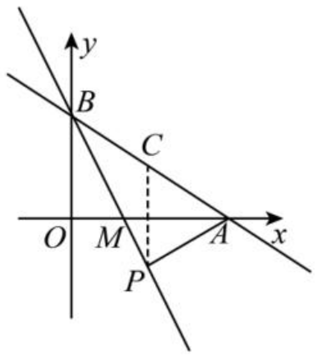
综上可知直线 BM 的表达式为 $y=-2x+2$ 或 $y=-x+2$；

【小问 3 详解】

解：$\because OM<MA$，

$\therefore$由（2）可知 $M(1,0)$，即此时直线 BM 的解析式为 $y=-2x+2$．

如图，过点 P 作 x 轴垂线，交直线 AB 于点 C.



设 $P(a,-2a+2)$，则 $C\left(a,-\frac{2}{3}a+2\right)$，

$\therefore PC=\left|y_P-y_C\right|=\left|\left[-2a+2-\left(-\frac{2}{3}a+2\right)\right]\right|=\left|\frac{4}{3}a\right|$,

$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}CP\cdot\left(x_A-x_B\right)=\frac{1}{2}\times\left|\frac{4}{3}a\right|\times(3-0)=|2a|$.

由（2）可知$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle AOB}=3$，

$\therefore |2a|=3$，

解得：$a=\pm\frac{3}{2}$.

当$a=\frac{3}{2}$时，$y_P=-2\times\frac{3}{2}+2=-1$，即$P\left(\frac{3}{2},-1\right)$；

当$a=-\frac{3}{2}$时，$y_P=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+2=5$，即$P\left(-\frac{3}{2},5\right)$.

综上可知点P的坐标为$\left(\frac{3}{2},-1\right)$或$\left(-\frac{3}{2},5\right)$.

25. 小普同学在折叠平行四边形纸片的过程中发现：如果把平行四边形沿指它的一条对角线翻折，会得到很多结论．例如：在平行四边形$ABCD$中，$AB\neq BC$，将$\triangle ABC$沿直线AC翻折至$\triangle AEC$，连接DE，可以得到$AC\,/\!/\,DE$.

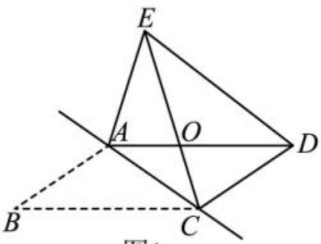


图1

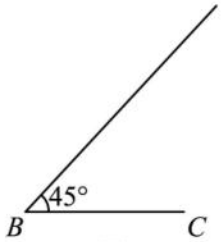


图2

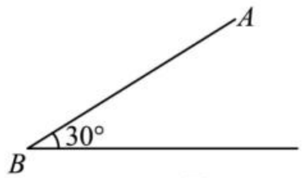


图3

（1）如图1，如果AD与CE相交于点O，求证$AC\,/\!/\,DE$；

（2）如图2，如果$\angle B=45°$，$BC=2$，当A、C、D、E为顶点的四边形是矩形时，求出AC的长；

（3）如图3，如果$\angle B=30°$，$AB=3$，当$\triangle AED$是直角三角形时，直接写出BC的长.

【答案】（1）见解析　　（2）$\sqrt{2}$或2

（3）$2\sqrt{3}$或$\frac{3\sqrt{3}}{2}$或$3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）由平行四边形的定义可得$AD\,/\!/\,BC$，$AB=CD$，$AD=CB$，由折叠的性质可得

$\angle ACE=\angle BCA$，$EC=BC$，于是可得$\triangle OAC$、$\triangle ODE$是等腰三角形，利用对顶角相等求得$\angle OCA$和$\angle OED$即可证明；

（2）分类讨论：①当四边形$ACDE$为矩形时和②当四边形$ACED$为矩形时求解即可；

（3）分类讨论：①当$\angle AED=90°$时，②当$\angle ADE=90°$时和③当$\angle EAD=90°$时，根据含$30°$直角三角形的边长关系和勾股定理计算求值即可．

【小问1详解】

证明：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$AD // BC$，$AB=CD$，$AD=CB$，

∴$\angle DAC=\angle BCA$．

由折叠可知$\angle ACE=\angle BCA$，$EC=BC$，

∴$\angle DAC=\angle ACE$，$EC=AD$，

∴$OA=OC$，

∴$\angle OAC=\dfrac{180°-\angle AOC}{2}$，$AD-OA=CE-OC$，

∴$OD=OE$，

∴$\angle ODE=\dfrac{180°-\angle DOE}{2}$．

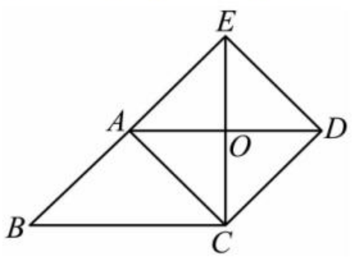
∵$\angle OAC=\angle ODE$，即$\dfrac{180°-\angle DOE}{2}=\dfrac{180°-\angle AOC}{2}$，

∴$\angle DOE=\angle AOC$，

∴$AC // DE$；

【小问2详解】

解：分类讨论：①当四边形$ACDE$为矩形时，如图，



∴$\angle CAE=90°$，

∴$\angle BAC=90°$．

∵$\angle B=45°$，

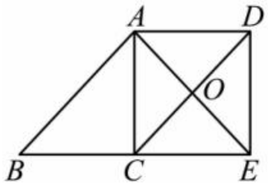
∴$\angle ACB=45°$，

∴$AB=AC$．

$\because AB^2+AC^2=BC^2$，$BC=2$，

$\therefore AC=\sqrt{2}$；

②当四边形 $ACED$ 为矩形时，如图，



$\therefore \angle ACE=90^\circ$，

$\therefore \angle ACB=90^\circ$．

$\because \angle B=45^\circ$，

$\therefore \angle BAC=45^\circ$，

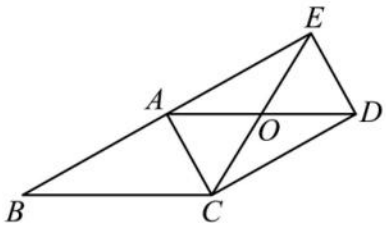
$\therefore AC=BC=2$．

综上可知当 A、C、D、E 为顶点的四边形是矩形时，AC 的长为 $\sqrt{2}$ 或 2；

【小问 3 详解】

解：如果 $\angle B=30^\circ, AB=3$，当 $\triangle AED$ 是直角三角形时，直接写出 BC 的长．

解：分类讨论：①当 $\angle AED=90^\circ$ 时，如图，



$\because AC /\!/ DE$，

$\therefore \angle CAE=90^\circ$，

$\therefore \angle BAC=90^\circ$．

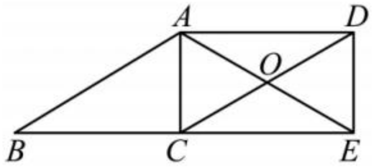
$\because \angle B=30^\circ$，

$\therefore BC=2AC$．

$\because BC^2=AC^2+AB^2$，$AB=3$，

$\therefore BC=2\sqrt{3}$；

②当 $\angle ADE=90^\circ$ 时，如图，



$\because AC /\!/ DE$，

$\therefore \angle CAD = \angle ADE = 90^\circ$.

$\because AD /\!/ BC$， $\angle B = 30^\circ$，

$\therefore \angle BAD = 150^\circ$，

$\therefore \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 60^\circ$，

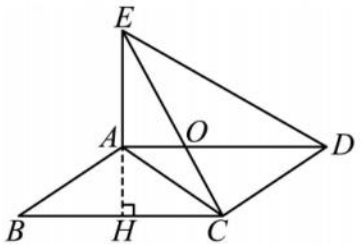
$\therefore \angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore BC^2 + AC^2 = AB^2$， $AB = 2AC$.

$\because AB = 3$，

$\therefore BC = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$；

③当$\angle EAD = 90^\circ$时，如图，作$AH \perp BC$于点H，



由折叠可知$\angle AEC = \angle B = 30^\circ$，

$\therefore \angle AOE = 60^\circ$.

由（1）可知$OA = OC$，

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$.

$\because AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle ACB = \angle OAC = 30^\circ$， $\angle AHB = 90^\circ$，

$\therefore \angle B = \angle ACB = 30^\circ$，

$\therefore AB = AC$， $AH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{3}{2}$，

$\therefore BC = 2BH = 2CH$.

$\because AB^2 = AH^2 + BH^2$，

$\therefore BH=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore BC=3\sqrt{3}$．

综上可知BC的长为$2\sqrt{3}$或$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$或$3\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了特殊平行四边形的判定和性质，折叠的性质，等腰三角形的判定和性质，含$30°$直角三角形的性质，勾股定理等知识．正确作出图形并利用分类讨论的思想是解题关键．