

2023 年上海二模数学 24 题解法分析汇编

各区 24 题主要有以下几个方面的考点：① 考察图形运动（翻折、平移），② 四边形的存在性问题，③ 面积比问题，④ 相似三角形的分类讨论，⑤ 45°特殊角问题等，接下来按分类马老师给大家逐个解析；

01

面积和面积比问题

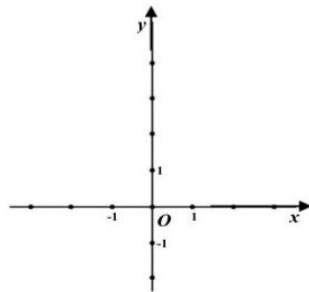
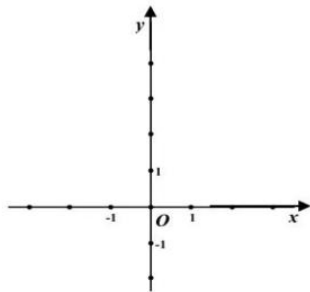
2023 年上海二模 24 题考察到面积和面积比问题的区县主要有宝山区、嘉定区、奉贤区；
宝山区（四边形面积问题）

2023 年宝山区二模第 24 题

24. (本题满分 12 分)

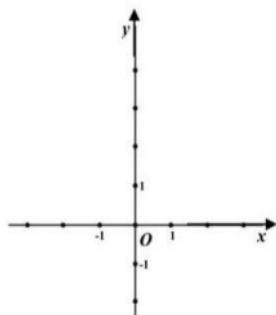
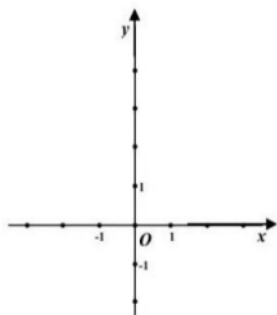
在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，抛物线的顶点为 D 。

- (1) 求二次函数的解析式和顶点 D 的坐标；
- (2) 联结 AC ，试判断 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BOC$ 是否相似，并说明理由；
- (3) 将抛物线平移，使新抛物线的顶点 E 落在线段 OC 上，新抛物线与原抛物线的对称轴交于点 F ，联结 EF ，如果四边形 $CEFD$ 的面积为 3，求新抛物线的表达式。



(备用图)

解法分析：本题第 (1) 问主要考察待定系数法求函数解析式，第 (2) 问主要考察两点间距离公式和相似三角形的判定方法，第 (3) 问考察了已知特殊四边形的面积求函数解析式问题；



(备用图)

【详解】(1) 解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} -9 - 3b + c = 0 \\ -1 + b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$, 顶点 D 的坐标为 $(-1, 4)$;

【详解】(2) 解: 当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$\therefore C(0, 3)$, $\because$ 点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$,

$\therefore OB = 1$, $OC = 3$,

$$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$CD = \sqrt{1^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2},$$

$$AD = \sqrt{(3-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

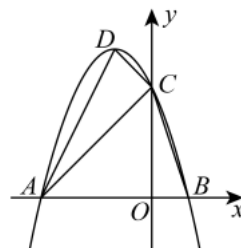
$$\because (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形, 且 $\angle ACD = 90^\circ$,

$$\because \angle ACD = \angle COB, \frac{AC}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 = \frac{OC}{OB},$$

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle COB$;



【详解】(3) 解: $\because y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = -1$,

设新抛物线的解析式为 $y = -x^2 + a$ ($0 \leq a \leq 3$), 则顶点 E 的坐标为 $(0, a)$,

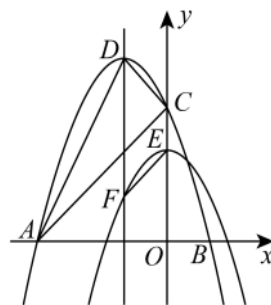
当 $x = -1$ 时, $y = a - 1$,

$\therefore F(-1, a-1)$,

$$\therefore CE = 3 - a, DF = 4 - (a - 1) = 5 - a,$$

$$\text{依题意得 } \frac{1}{2}(3 - a + 5 - a) \times 1 = 3,$$

解得 $a = 1$, $\therefore$ 新抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 1$.



2023 年嘉定区二模第 24 题

24. (本题满分 12 分, 其中第 (1) 小题 4 分, 第 (2) ①小题 4 分, 第 (2) ②小题 4 分)

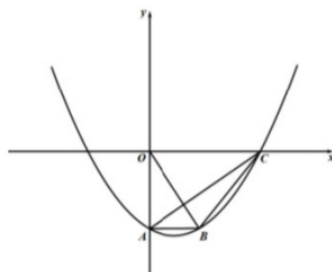
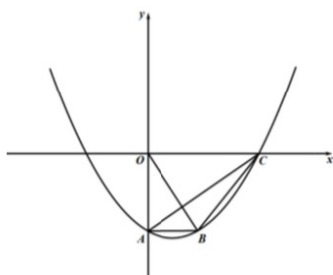
如图 8, 在直角坐标平面 xOy 中, 点 A 在 y 轴的负半轴上, 点 C 在 x 轴的正半轴上, $AB \parallel OC$, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 4 (a \neq 0)$ 经过 A 、 B 、 C 三点.

(1) 求点 A 、 B 的坐标;

(2) 联结 AC 、 OB 、 BC , 当 $AC \perp OB$ 时,

①求抛物线表达式;

②在抛物线的对称轴上是否存在点 P , 使得 $S_{\triangle PAC} = 4S_{\triangle ABC}$? 如果存在, 求出所有符合条件的点 P 坐标; 如果不存在, 请说明理由.



解法分析： 本题第 (1) 问考察求点的坐标, 第 (2) 问考察特殊情况下“ $AC \perp OB$ ”时求函数解析式的方法, 第 (3) 问考察已知三角形面积比时求点的坐标, 主要还是考察由面积比转化为线段长度比问题;

【详解】(1) $\because$ 该抛物线的表达式为 $y = ax^2 - 2ax - 4 (a \neq 0)$,

$$\therefore y = a(x-1)^2 - a - 4,$$

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为 $x=1$,

$\because$ 抛物线 $y = a(x-1)^2 - a - 4$ 经过点 A , 且点 A 在 y 轴的负半轴上,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, -4)$,

$\because AB \parallel OC$, 对称轴为 $x=1$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 4)$;

【详解】(2) ① $\because AC \perp OB$, $AB \parallel OC$,

$\therefore \angle AOB = \angle OAB = 90^\circ$, $\angle OAC + \angle CAB = 90^\circ = \angle OAC + \angle AOB$, $\angle OCA = \angle CAB$,

$\therefore \angle AOB = \angle OCA$, $\therefore \triangle OAC \sim \triangle ABO$,

$$\therefore \frac{AB}{OA} = \frac{OA}{OC}, \quad \because O(0, 0), B(2, 4), A(0, -4),$$

$$\therefore AB = 2, OA = 4, \quad \text{即: } \frac{2}{4} = \frac{4}{OC}, \quad \therefore OC = 8,$$

$\because$ 点 C 在 x 轴的正半轴上, $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(8, 0)$,

将 $(8, 0)$ 代入 $y = ax^2 - 2ax - 4$ 中, 解得 $a = \frac{1}{12}$,

$\therefore$ 该抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x - 4$;

【详解】(2) ② 存在, 理由如下:

$$\because A(0, -4), B(2, 4), \quad \therefore AB = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4,$$

设点 P 的坐标为 $(1, m)$,

如图, 抛物线对称轴交 AC 于 N 点,

$$\because A(0, -4), C(8, 0),$$

$\therefore$ 利用待定系数法可求出直线 AC 的解析式为: $y = \frac{1}{2}x - 4$,

$$\text{即 } x=1 \text{ 时, } y = \frac{1}{2}x - 4 = -\frac{7}{2}, \quad \text{即 } N\left(1, -\frac{7}{2}\right),$$

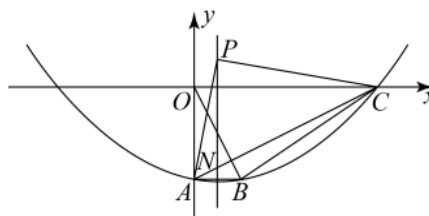
$$\text{则有: } PN = \left|m + \frac{7}{2}\right|,$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times PN \times x_C = \frac{1}{2} \times \left|m + \frac{7}{2}\right| \times 8,$$

$$\text{即有: } \frac{1}{2} \times \left|m + \frac{7}{2}\right| \times 8 = 4 \times 4 = 16,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{15}{2}, \text{ 或者 } m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(1, -\frac{15}{2}\right) \text{ 或 } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$



2023 年奉贤区二模第 24 题

24. (本题满分 12 分，每小题满分 4 分)

如图 9，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C 。

- (1) 求该抛物线的表达式和对称轴；
- (2) 联结 AC 、 BC ， D 为 x 轴上方抛物线上一点（与点 C 不重合），如果 $\triangle ABD$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，求点 D 的坐标；
- (3) 设点 $P(m, 4)$ ($m > 0$)，点 E 在抛物线的对称轴上（点 E 在顶点上方），当 $\angle APE = 90^\circ$ ，且 $\frac{EP}{AP} = \frac{5}{4}$ 时，求点 E 的坐标。

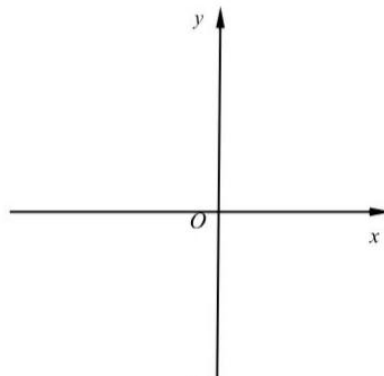


图 9

解法分析： 本题的第（1）问主要考察二次函数解析式的求法；第（2）问考察面积相等情况下点坐标的求法，第（3）问考察在特殊背景下

“ $\angle APE = 90^\circ$ 且 $\frac{EP}{AP} = \frac{5}{4}$ ”求点的坐标；

解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$,

$\therefore$ 代入得 $-1 + b + 3 = 0$, 解得 $b = -2$. (2分)

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y = -x^2 - 2x + 3$.

该抛物线的对称轴是直线 $x = -1$. (2分)

解: (2) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 与 y 轴交于点 C , $\therefore C(0, 3)$. (1分)

$\because \triangle ABD$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等,

$\therefore$ 点 C 到 x 轴的距离等于点 D 到 x 轴的距离.

$\therefore$ 点 C 与点 D 关于抛物线的对称轴对称. (2分)

$\because$ 点 D 在 x 轴上方的抛物线上,

$\therefore$ 点 D 的坐标 $(-2, 3)$. (1分)

解: (3) 过点 P 作对称轴的垂线, 垂足为点 H , 作 x 轴的垂线, 垂足为点 G .

$\because \angle APE = \angle GPH = 90^\circ$, $\therefore \angle EPH = \angle APG$.

$\because \angle EHP = \angle AGP = 90^\circ$, $\therefore \triangle EHP \sim \triangle AGP$. (1分)

$$\therefore \frac{EP}{AP} = \frac{EH}{AG} = \frac{PH}{PG}.$$

$\because \frac{EP}{AP} = \frac{5}{4}$, $GP = 4$, $\therefore PH = 5$. (1分)

$\because$ 点 A 到对称轴的距离是 2, $\therefore AG = 3$.

$\therefore EH = \frac{15}{4}$, $\therefore E$ 的纵坐标是 $\frac{31}{4}$. (1分)

$\therefore$ 点 E 的坐标 $(-1, \frac{31}{4})$. (1分)

2023 年上海二模 24 题考到图形运动问题（平移、翻折）的区县有崇明区（平移）、金山区（平移）、浦东新区（平移）、松江区（旋转）、徐汇区（翻折）、杨浦区（平移）、青浦区（平移）：

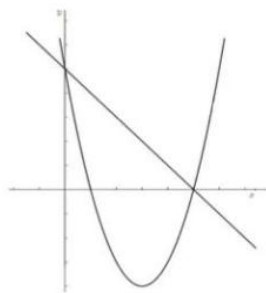
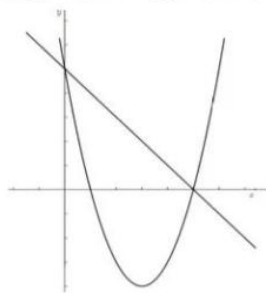
崇明区（平移）

2023 年崇明区二模第 24 题

24. (本题满分 12 分，每小题各 4 分)

如图，在直角坐标平面 xOy 中，直线 $y = -x + 5$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点，点 D 是抛物线的顶点。

- (1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标；
- (2) 抛物线与 x 轴的另一个交点为 C ，点 $M(a, -\frac{7}{4})$ 在抛物线对称轴左侧的图像上，将抛物线向上平移 m 个单位 ($m > 0$)，使点 F 落在 $\triangle ABC$ 内，求 m 的取值范围；
- (3) 对称轴与直线 AB 交于点 E ， P 是线段 AB 上的一个动点 (P 不与 E 重合)，过 P 作 y 轴的平行线交原抛物线于点 Q ，当 $PE = QD$ 时，求点 Q 的坐标。



解法分析： 本题第 (1) 问考察待定系数法求函数解析式，第 (2) 二次函数图形的平移问题，第 (3) 考察当线段相等情况下点的坐标的求解问题；

【详解】(1) 解：在 $y = -x + 5$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = 5$ ，令 $y = 0$ ，则 $x = 5$ ，

$\therefore A(5, 0)$ ， $B(0, 5)$ ，

把 $A(5, 0)$ ， $B(0, 5)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 中得：
$$\begin{cases} 25 + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases}$$
，

$\therefore \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$ ，

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(3, -4)$ ；

【详解】(2) 解：在 $y = x^2 - 6x + 5$ 中，当 $y = -\frac{7}{4}$ 时，则 $x^2 - 6x + 5 = -\frac{7}{4}$ ，

解得 $x = \frac{9}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 点 $M\left(a, -\frac{7}{4}\right)$ 在抛物线对称轴左侧的图像上，

$\therefore M\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ ，

在 $y = -x + 5$ 中，当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $y = \frac{7}{2}$ ，

$\therefore$ 将抛物线向上平移 m 个单位 ($m > 0$)，使点 M 落在 $\triangle ABC$ 内，

$\therefore \frac{7}{4} < m < \frac{7}{2}$ ；

【详解】(3) 解：如图 1 所示，当点 P 在点 E 左侧时，设原抛物线对称轴与 x 轴交于点 H ，过点 Q 作 $QT \parallel PE$ 交 DE 于 T ，

$\because PQ \parallel y$ 轴， $\therefore PQ \parallel ET$ ， $\therefore$ 四边形 $PQTE$ 是平行四边形，

$\therefore PE = QT$ ， $\because PE = QD$ ， $\therefore QT = QD$ ；

$\because A(5, 0)$ ， $B(0, 5)$ ， $\therefore OA = OB = 5$ ，

$\therefore \angle OBA = 45^\circ$ ， $\because DE \parallel OB$ ， $\therefore \angle QTD = \angle PED = 135^\circ$ ，

$\therefore$ 此时不可能存在 $QT = QD$ （当点 T 在点 D 下方时，同样可证明不存在），

则此时只有点 T 与点 D 重合，

设 $P(m, -m + 5)$ ，则 $Q(m, m^2 - 6m + 5)$ ，

在 $y = -x + 5$ 中，当 $x = 3$ 时， $y = 2$ ，

$\therefore E(3, 2)$ ，

由平行四边形对角线中点坐标相同可知 $\frac{-m + 5 - 4}{2} = \frac{2 + m^2 - 6m + 5}{2}$ ，

解得 $m = 2$ 或 $m = 3$ （舍去）， $\therefore Q(2, -3)$ ；

如图 2 所示，当点 P 在点 E 右侧时，由对称性可知当 $m = 4$ 时符合题意，

$\therefore Q(4, -3)$ ；

综上所述，点 Q 的坐标为 $Q(2, -3)$ 或 $Q(4, -3)$ 。

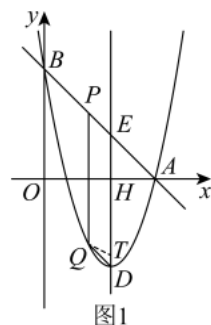


图1

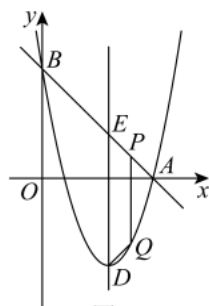


图2

2023 年金山区二模第 24 题

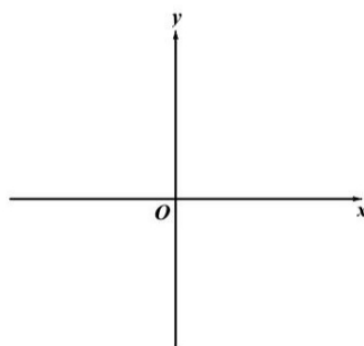
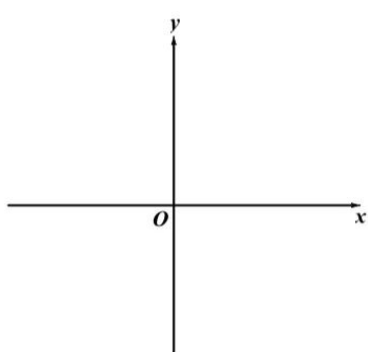
24. (本题满分 12 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 4 分, 第 (3) 小题 4 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 8)$, 直线 AB 与 y 轴交于点 C , 与抛物线的对称轴直线 l 交于点 D .

(1) 求抛物线的表达式及对称轴;

(2) 如果该抛物线平移后经过点 C , 其顶点 P 在原抛物线上, 且点 P 在直线 l 的右侧, 求点 P 的坐标;

(3) 点 E 在直线 l 上, 若 $\tan \angle ABE = \frac{1}{3}$, 求点 E 的坐标.



解法分析： 本题第 (1) 问考察二次函数解析式的求法, 第 (2) 问考察二次函数中图形的平移, 第 (3) 问考察已知角的度数“ $\tan \angle ABE = \frac{1}{3}$ ”时求点的坐标;

【详解】(1) 解：把点 $A(-2,0)$ 和点 $B(6,8)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得：

$$\begin{cases} 2-2b+c=0 \\ 18+6b+c=8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=-1 \\ c=-4 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$\text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1,$$

【详解】(2) 设直线 AB 的解析式为 $y = mx + n$, 代入得： $\begin{cases} -2m+n=0 \\ 6m+n=8 \end{cases},$

$$\text{解得} \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = x + 2$,

当 $x=0$ 时, $y=2$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(0,2)$,

设平移后的顶点坐标为 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2 - a - 4\right)$,

则解析式为 $y = \frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}a^2 - a - 4$,

把 $(0,2)$ 代入得： $a=3$ 或 $a=-2$ (舍),

$$\therefore P\left(3, -\frac{5}{2}\right),$$

【详解】(3) $\because OA=OC=2$,

$\therefore \angle CAO = \angle ACO = \angle EDB = 45^\circ$,

对于 $y = x + 2$, 当 $x=1$ 时, $y=3$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1,3)$, $\therefore DB = 5\sqrt{2}$,

当点 E 在点 D 的上方时, 过 E 作 $EF \perp BD$ 于点 F ,

$$\because \tan \angle ABE = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BF = 3EF = 3DF,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{4}DB = \frac{5}{4}\sqrt{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}DF = \sqrt{2} \times \frac{5}{4}\sqrt{2} = \frac{5}{2}, \therefore E\left(1, \frac{11}{2}\right),$$

当点 E 在点 D 的下方时, 过 E 作 $EF \perp BD$ 于点 F ,

$$\because \tan \angle ABE = \frac{1}{3}$$

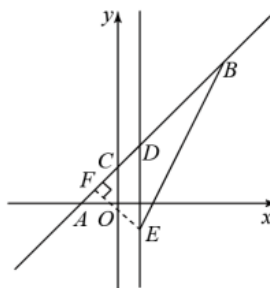
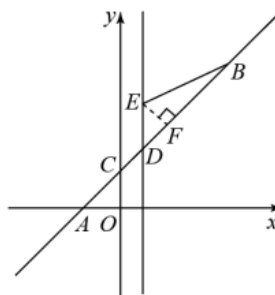
$$\therefore BF = 3EF = 3DF,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}DB = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}DF = \sqrt{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{2} = 5,$$

$$\therefore E(1, -2),$$

综上所述, $E\left(1, \frac{11}{2}\right)$ 或 $E(1, -2)$.



2023 年浦东新区二模第 24 题

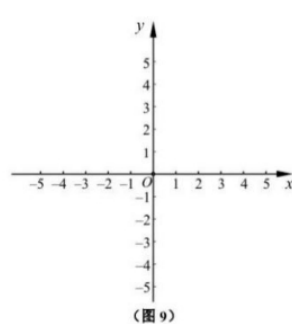
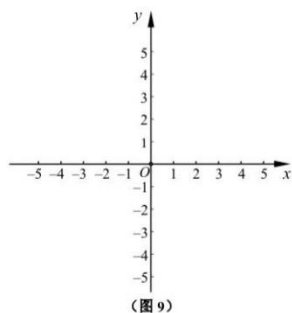
24. (本题满分 12 分, 每小题各 4 分)

如图 9, 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 C , 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 C 两点, 且与 x 轴的另一个交点为 B , 抛物线的顶点为 P .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如果抛物线的对称轴与直线 BC 交于点 D , 求 $\tan \angle ACD$ 的值;

(3) 平移这条抛物线, 平移后的抛物线交 y 轴于点 E , 顶点 Q 在原抛物线上. 当四边形 $BPQE$ 是平行四边形时, 求平移后抛物线的表达式.



解法分析： 本题的第 (1) 问考察二次函数解析式的求法, 第 (2) 问考察非直角三角形背景下求角的大小, 第 (3) 问考察二次函数图形的平移背景下特殊四边形的存在性问题,

【详解】(1) 解: 把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x-2$ 得: $0=-\frac{1}{2}x-2$, 解得: $x=-4$,

$$\therefore A(-4,0),$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 代入 } y=-\frac{1}{2}x-2 \text{ 得: } y=-2, \therefore C(0,-2),$$

将点 $A(-4,0)$, $C(0,-2)$ 代入 $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 得:

$$\begin{cases} 0=4-4b+c \\ -2=c \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ c=-2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{该抛物线的表达式为: } y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2;$$

【详解】(2) 解: 连接 AD ,

$$\text{把 } y=0 \text{ 代入 } y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2 \text{ 得: } 0=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2,$$

$$\text{解得: } x_1=-4, x_2=2, \therefore B(2,0),$$

设直线 BC 的表达式为: $y=kx+b$,

将点 $B(2,0)$, $C(0,-2)$ 代入得:

$$\begin{cases} 0=2k+b \\ -2=b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=1 \\ b=-2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为: $y=x-2$,

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x=-\frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{4}}=-1,$$

$$\therefore D(-1,-3),$$

$$\therefore A(-4,0), C(0,-2), D(-1,-3),$$

$$\therefore AC^2=4^2+2^2=20, AD^2=3^2+3^2=18, CD^2=1^2+1^2=2,$$

$$\therefore AC^2=AD^2+CD^2, \text{ 即 } \angle ADC=90^\circ,$$

$$\therefore AD=\sqrt{18}=3\sqrt{2}, CD=\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$$

$$\text{【详解】(3) 解: } \therefore y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{9}{4},$$

$$\therefore P\left(-1, -\frac{9}{4}\right),$$

$\therefore$ 平移后的抛物线顶点 Q 在原抛物线上,

$$\therefore \text{设点 } Q\left(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - 2\right), \therefore \text{点 } E \text{ 在 } y \text{ 轴上},$$

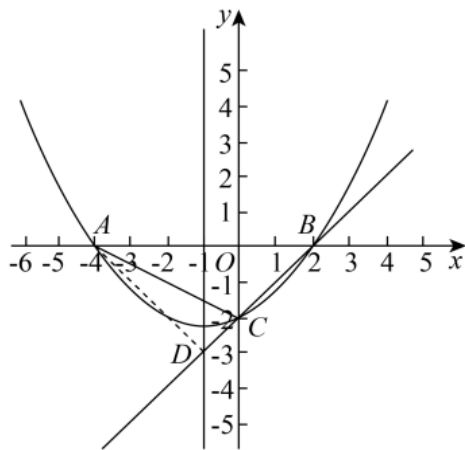
$$\therefore \text{设点 } E(0, m), \therefore B(2, 0),$$

$$\therefore BQ \text{ 中点坐标: } \left(\frac{2+t}{2}, \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t - 1\right), PE \text{ 中点坐标: } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{8} + \frac{m}{2}\right),$$

$$\therefore \text{四边形 } BPQE \text{ 是平行四边形, } \therefore \frac{2+t}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } t = -3. \therefore Q\left(-3, -\frac{5}{4}\right),$$

$$\therefore \text{平移后的函数表达式为: } y = \frac{1}{4}(x+3)^2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1,$$

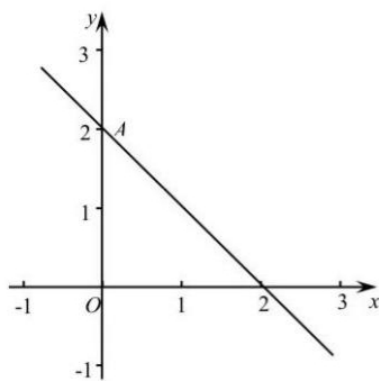
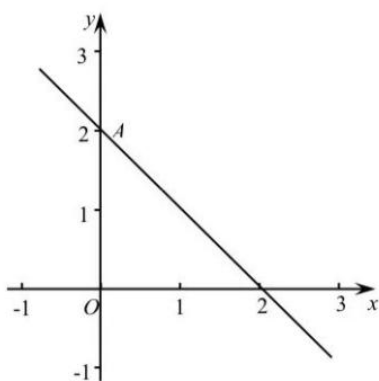


2023 年松江区二模第 24 题

24. （本题满分 12 分，第（1）小题 3 分，第（2）小题 4 分，第（3）小题 5 分）

在平面直角坐标系 xOy 中（如图 6），已知直线 $y = -x + 2$ 与 y 轴交于点 A ，抛物线 $y = (x - t)^2 - 1$ ($t > 0$) 的顶点为 B 。

- （1）若抛物线经过点 A ，求抛物线解析式；
- （2）将线段 OB 绕点 B 顺时针旋转 90° ，点 O 落在点 C 处，如果点 C 在抛物线上，求点 C 的坐标；
- （3）设抛物线的对称轴与直线 $y = -x + 2$ 交于点 D ，且点 D 位于 x 轴上方，如果 $\angle BOD = 45^\circ$ ，求 t 的值。



解法分析： 本题的第（1）问考察待定系数法求函数解析式，第（2）问考察线段的旋转问题，第（3）问考察二次函数背景下 45° 特殊角问题；

【详解】(1) 解: $\because$ 直线 $y = -x + 2$ 与 y 轴交于点 A ,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$, $\therefore A(0, 2)$,

若抛物线经过点 A , 则 $2 = (0 - t)^2 - 1$

解得: $t = \sqrt{3}$ 或 $t = -\sqrt{3}$ (舍去)

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = (x - \sqrt{3})^2 - 1$;

【详解】(2) $\because y = (x - t)^2 - 1 (t > 0)$ 的顶点为 B , $\therefore B(t, -1)$

如图所示, 过点 B 作 $DE \perp y$ 轴, 垂足为 E , 过点 C 作 $CD \perp DE$ 于点 D ,

$\because$ 旋转,

$\therefore OB = OC, \angle OBC = 90^\circ$,

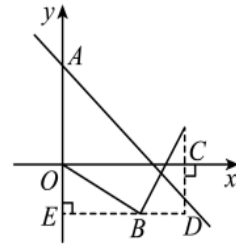
$\therefore \angle BEO = \angle OBC = \angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OBE = 90^\circ - \angle CBD = \angle BCD$, $\therefore \triangle BEO \cong \triangle CDB$

$\therefore OE = BD = 1, BE = CD = t$, $\therefore C(t+1, t-1)$

$\because C(t+1, t-1)$ 在抛物线上,

$\therefore t-1 = (t+1-t)^2 - 1$ 解得: $t = 1$, $\therefore C(2, 0)$,



【详解】(3) 解: 如图所示, 设直线 $y = -x + 2$ 与 x 轴交于点 H , BD 与 x 轴交于点 F ,

由 $y = -x + 2$, 令 $y = 0$, 得 $x = 2$, 则 $H(2, 0)$,

$\therefore OA = OH = 2$, $AH = 2\sqrt{2}$

$\therefore \triangle OAH$ 是等腰直角三角形

$\because BD \parallel y$ 轴,

$\therefore \triangle DFH$ 是等腰直角三角形,

$\therefore DF = FH = 2 - t$, 则 $DH = \sqrt{2}DF = \sqrt{2}(2 - t)$

过点 O 作 $OE \perp AH$, 则 $\triangle OEH$ 是等腰直角三角形, 则 $OE = EH = \frac{1}{2}AH = \sqrt{2}$, 则

$ED = EH - DH = \sqrt{2} - \sqrt{2}(2 - t) = \sqrt{2}(t - 1)$

$\therefore \angle EOH = \angle EOD + \angle DOH = 45^\circ$

$\because \angle BOD = \angle FOB + \angle DOH = 45^\circ$,

$\therefore \angle EOD = \angle FOB$

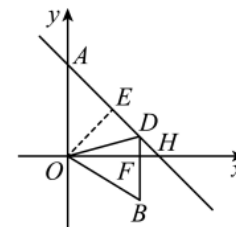
又 $OE \perp ED, BF \perp OF$

$\therefore \tan \angle EOD = \tan \angle FOB$

即 $\frac{DE}{OE} = \frac{FB}{OF}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}(t-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{t}$

解得: $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去)



2023 年徐汇区二模第 24 题

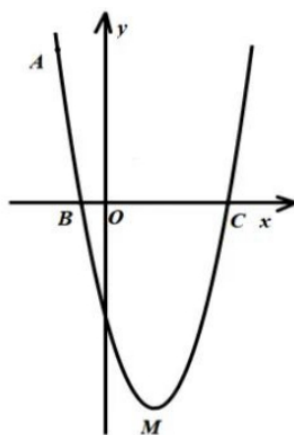
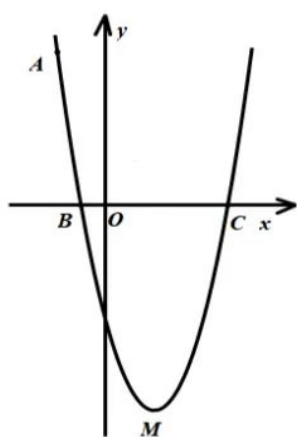
24. 如图，已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 7)$ ，与 x 轴交于点 B 、 $C(5, 0)$ 。

(1) 求抛物线的顶点 M 的坐标；

(2) 点 E 在抛物线的对称轴上，且位于 x 轴的上方，将 $\triangle BCE$ 沿直线 BE 翻折，

如果点 C 的对应点 F 恰好落在抛物线的对称轴上，求点 E 的坐标；

(3) 点 P 在抛物线的对称轴上，点 Q 是抛物线上位于第四象限内的点，当 $\triangle CPQ$ 为等边三角形时，求直线 BQ 的表达式。



解法分析： 本题的第 (1) 问考察抛物线的顶点坐标，第 (2) 问考察图形的翻折背景下求点的坐标，第 (3) 问考察二次函数背景下等边三角形的存在性问题；

【详解】(1) 解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 7)$, 与 x 轴交于点 B 、 $C(5, 0)$.

$$\therefore \begin{cases} 4 - 2b + c = 7 \\ 25 + 5b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = -4 \\ c = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线为: $y = x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9$,

$\therefore$ 顶点坐标为: $M(2, -9)$.

【详解】(2) 如图, 令 $y = x^2 - 4x - 5 = 0$,

解得: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交于 $B(-1, 0)$, $C(5, 0)$,

$\therefore BC = 6$, 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$,

设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 H , 则 H 点的坐标为 $(2, 0)$, $BH = 3$,

由翻折得 $CB = FB = 6$,

由勾股定理, 得 $FH = \sqrt{FB^2 - BH^2} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(2, 3\sqrt{3})$, $\tan \angle FBH = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle FBH = 60^\circ$,

由翻折得 $\angle EBH = \frac{1}{2} \angle FBH = 30^\circ$,

$\therefore EH = BH \cdot \tan 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$;

【详解】(3) 连接 CF ,

$\because BF = BC$, $\angle FBC = 60^\circ$, 则 $\triangle FCB$ 为等边三角形,

$\because \triangle PCQ$, $\triangle FCB$ 为等边三角形,

$\therefore CP = CQ$, $CB = CF$, $\angle FCB = \angle PCQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle FCP = \angle BCQ$,

$\therefore \triangle BCQ \cong \triangle FCP$,

$\therefore \angle CBQ = \angle CFH$,

$\because \triangle BCF$ 为等边三角形, $FH \perp BC$,

$\therefore \angle CFH = 30^\circ = \angle CBQ$,

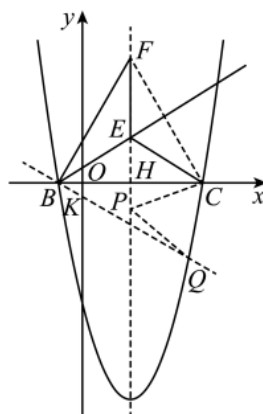
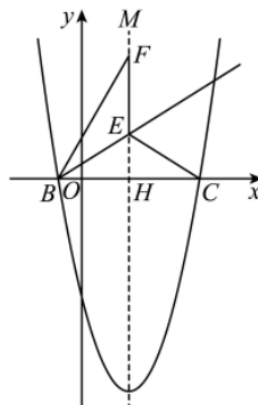
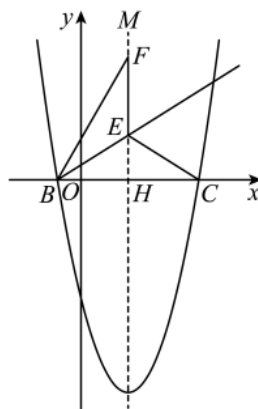
设 BP 与 x 轴相交于点 K ,

$\therefore OK = OB \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 点 K 的坐标为 $(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

设直线 BP 的函数表达式为 $y = mx + n$, 则 $\begin{cases} -m + n = 0 \\ n = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ n = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BP 的函数表达式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.



2023 年杨浦区二模第 24 题

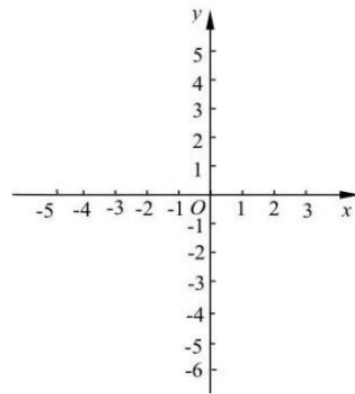
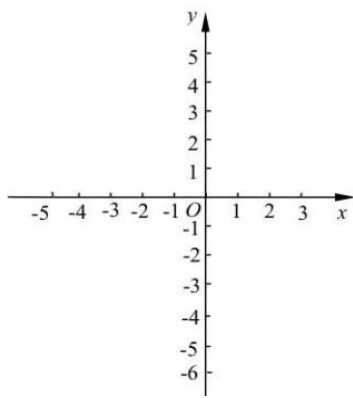
24. (本题满分 12 分, 每小题各 4 分)

已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + b$ 与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$.

(1) 求抛物线 C_1 的表达式;

(2) 把抛物线 C_1 沿射线 CA 方向平移得到抛物线 C_2 , 此时点 A 、 C 分别平移到点 D 、 E 处, 且都在直线 AC 上, 设点 F 在抛物线 C_1 上, 如果 $\triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形, 求点 F 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 设点 M 为线段 BC 上的一点, $EN \perp EM$, 交直线 BF 于点 N , 求 $\tan \angle ENM$ 的值.



解法分析： 本题第 (1) 问考察待定系数法求函数解析式的方法, 第 (2) 问考察二次函数平移背景下的等腰直角三角形的存在性问题, 第 (3) 问考察“一线三直角”问题

【详解】(1) 解: $\because$ 抛物线 $C_1: y = ax^2 + b$ 经过点 $A(-2, 0)$ 和 $C(0, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} 4a + b = 0 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$;

【详解】(2) 解: 如图 1,

$\because A(-2, 0)$ 、 $C(0, 2)$,

$$\therefore AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + c$,

$$\therefore \begin{cases} -2k + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 2$,

$\because \triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形,

$\therefore \angle DEF = 45^\circ$, 由平移得 $DE = AC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore EF = \sqrt{2}DE = 4$, 设 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2\right)$, 则 $E(m, m+2)$,

$$\therefore (m+2) - \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2\right) = 4,$$

解得 $m = 2$ (舍) 或 $m = -4$, $\therefore F(-4, -6)$;

【详解】(3) 解: 如图 2,

$\because$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, 令 $y = 0$, 则 $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 2$,

解得 $x = 2$ 或 -2 , $\therefore B(2, 0)$,

$\because$ 点 $A(-2, 0)$ 和 $C(0, 2)$,

$\therefore \angle BCA = 90^\circ$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$, $\therefore BC \perp AC$,

$\because DF \perp AC$, $\therefore DF \parallel BC$,

$\because DF = DE = BC = AC$, $\therefore$ 四边形 $DFBC$ 是矩形,

作 $EG \perp AC$, 交 BF 于 G , $\therefore EG = BC = AC = 2\sqrt{2}$,

$\because EN \perp EM$, $\therefore \angle MEN = 90^\circ$,

$\because \angle CEG = 90^\circ$, $\therefore \angle CEM = \angle NEG$,

$\therefore \triangle ENG \sim \triangle EMC$, $\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{EC}{EG}$,

$\because F(-4, -6)$, $EF = 4$, $\therefore E(-4, -2)$,

$\because C(0, 2)$, $\therefore EC = \sqrt{4^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ENM = \frac{EM}{EN} = 2.$$

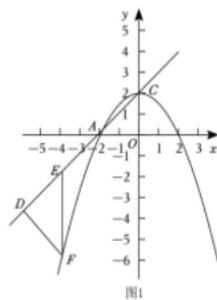


图1

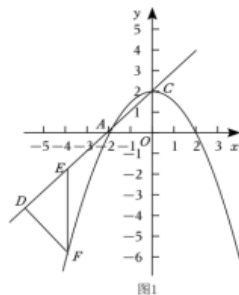


图1

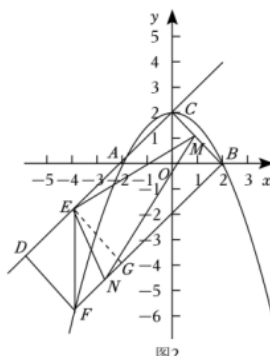


图2

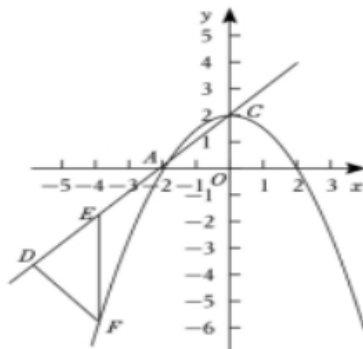


图1

2023 年青浦区二模第 24 题

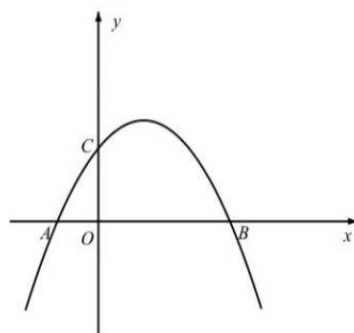
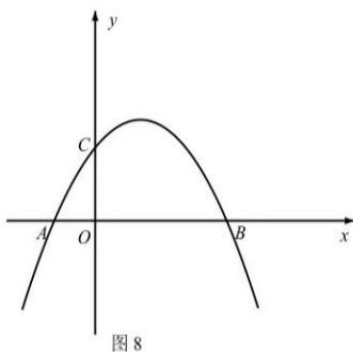
24. (本题满分 12 分, 其中第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 4 分, 第 (3) 小题 4 分)

如图 8, 已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过点 $B(6, 0)$ 和 $C(0, 3)$, 与 x 轴的另一个交点为点 A .

(1) 求抛物线的解析式及点 A 的坐标;

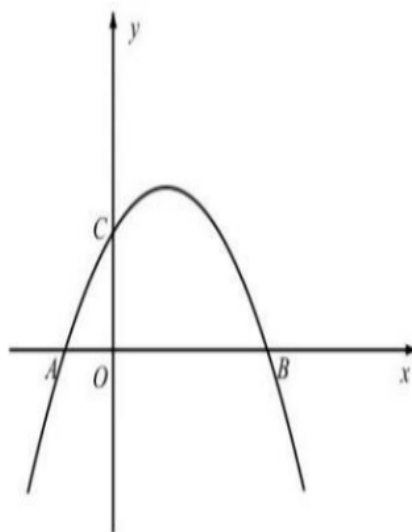
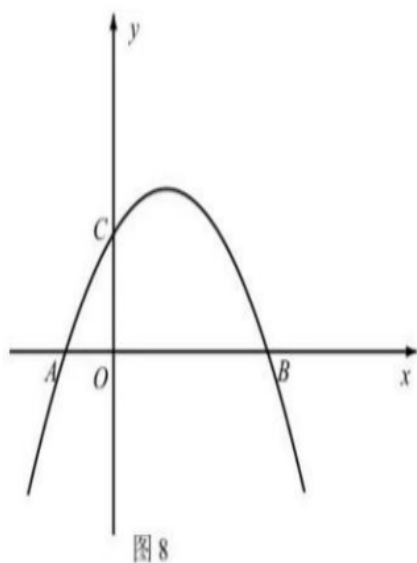
(2) 将该抛物线向右平移 m 个单位 ($m > 0$), 点 C 移到点 D , 点 A 移到点 E , 若 $\angle DEC = 90^\circ$, 求 m 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 设新抛物线的顶点为 G , 新抛物线在对称轴右侧的部分与 x 轴交于点 F , 求点 C 到直线 GF 的距离.



解法分析： 本题第 (1) 问考察了抛物线解析式的求法, 第 (2) 问考察抛物线的平移背景下直角三角形的存在性问题, 第 (3) 问考察了点

到直线的距离问题;



解: (1) 将 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 代入 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} -9 + 6b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以, } y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } x=6 \text{ 或 } x=-2. \therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (-2, 0) \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

解: (2) 由平移得 $AC \parallel DE$, 平移距离 $m = AE$.

$$\therefore \angle ACE = \angle DEC = 90^\circ. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because \angle ACO + \angle OCE = 90^\circ, \angle ACO + \angle CAO = 90^\circ. \therefore \angle CAO = \angle OCE$$

$$\therefore \tan \angle CAO = \tan \angle OCE. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACO \text{ 中, } \tan \angle ACO = \frac{OC}{OA} = \frac{3}{2}; \text{ 在 Rt}\triangle ECO \text{ 中, } \tan \angle OCE = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{3}$$

$$\therefore \frac{OE}{3} = \frac{3}{2}, \quad OE = \frac{9}{2} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AE = AO + OE = \frac{13}{2}, \text{ 即 } m = \frac{13}{2} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

解: (3) 过点 C 作 $CH \perp GF$, 垂足为点 H .

过点 G 作 $GP \perp x$ 轴, 垂足为点 P . 设直线 GF 与 y 轴交于点 M .

$$\text{原抛物线 } y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 \text{ 向右平移 } \frac{13}{2} \text{ 个单位, 得到 } y = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + 4.$$

$$\therefore G\left(\frac{17}{2}, 4\right), F\left(\frac{25}{2}, 0\right), P\left(\frac{17}{2}, 0\right). \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$GP = PF = 4, \therefore \triangle GPF \text{ 是等腰直角三角形, } \angle GFP = 45^\circ. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 Rt}\triangle MOF \text{ 中, } \angle OMF = \angle OFM = 45^\circ, OM = OF = \frac{25}{2}.$$

$$\therefore CM = OM - OC = \frac{19}{2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 Rt}\triangle MCH \text{ 中, } \sin \angle OMF = \frac{CH}{CM},$$

$$CH = CM \cdot \sin \angle OMF = \frac{19}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19\sqrt{2}}{4}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{答: 点 } C \text{ 到直线 } GF \text{ 的距离是 } \frac{19\sqrt{2}}{4}.$$

二次函数中特殊四边形性问题

2023 年上海二模考察到二次函数背景下特殊四边形存在性题目的区县有 **黄浦区（平行四边形）、静安区、虹口区（平行四边形）**

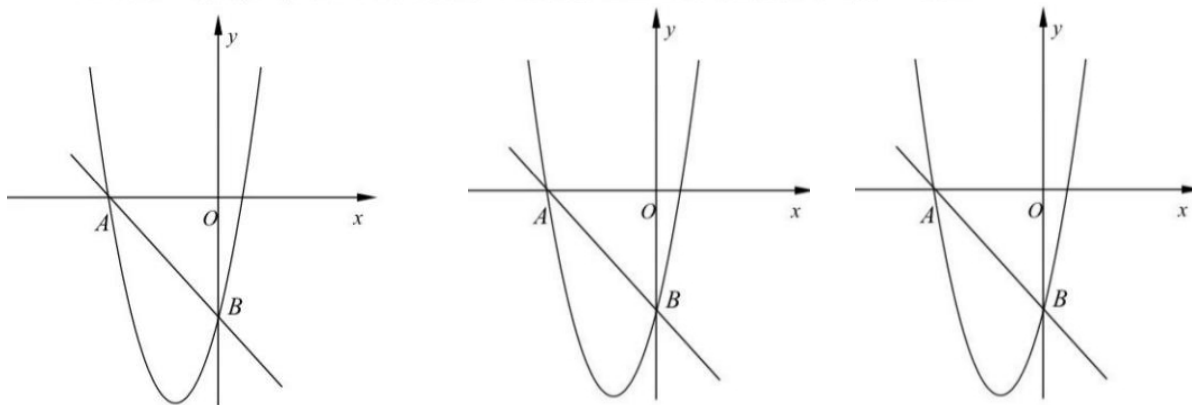
黄浦区

2023 年黄浦区二模第 24 题

24. (本题满分 12 分)

如图 5，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x - 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 A 、 B 。

- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 设抛物线与 x 轴的另一个交点为 C ，点 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，求点 P 坐标；
- (3) 点 D 坐标是 $(0, 4)$ ，点 M 、 N 在抛物线上，且四边形 $MBND$ 是平行四边形，求线段 MN 的长。



解法分析： 本题第 (1) 问考察抛物线解析式的求法，第 (2) 问考察外接圆背景下点的坐标的求法，第 (3) 问考察二次函数背景下特殊四边形的存在性问题，

【详解】(1) 解: 把 $x=0$ 代入 $y=-x-4$ 得 $y=-4$,

$\therefore$ 点 B 坐标是 $(0, -4)$,

把 $y=0$ 代入 $y=-x-4$, 得 $x=-4$, $\therefore$ 点 A 坐标是 $(-4, 0)$,

将点 A 、 B 坐标代入 $y=x^2+bx+c$, 得 $\begin{cases} c=-4 \\ 0=(-4)^2+(-4)b+c \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} b=3 \\ c=-4 \end{cases}$.

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y=x^2+3x-4$.

【详解】(2) $\because y=x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$,

$\because$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心.

$\therefore$ 点 P 在 AC 的垂直平分线上, 即抛物线的对称轴上.

$\therefore$ 点 P 横坐标是 $-\frac{3}{2}$. 设点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, a\right)$,

$\because PB=PA$,

$$\therefore \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-0\right)^2+\left[a-(-4)\right]^2}=\sqrt{\left[-\frac{3}{2}-(-4)\right]^2+(a-0)^2},$$

解得 $a=-\frac{3}{2}$, $\therefore$ 点 P 的坐标是 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

【详解】(3) $\because$ 点 O 是 BD 中点, 即 O 是平行四边形 $MBND$ 对角线交点,

又 $\because$ 四边形 $MBND$ 是平行四边形,

$\therefore$ 点 M , N 关于原点对称.

设点 M 的横坐标为 m ($m \geq 0$),

则点 M 坐标是 (m, m^2+3m-4) , 点 N 坐标是 $(-m, -m^2-3m+4)$,

把点 $(-m, -m^2-3m+4)$ 坐标代入 $y=x^2+3x-4$,

$$\text{得 } -m^2-3m+4=m^2-3m-4,$$

解得 $m=2$ (负值已舍),

当 $m=2$ 时, $m^2+3m-4=2^2+3 \times 2-4=6$,

$\therefore$ 点 M 坐标是 $(2, 6)$, 点 N 坐标是 $(-2, -6)$,

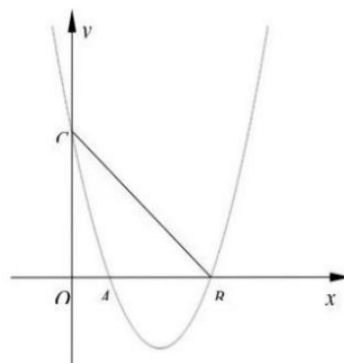
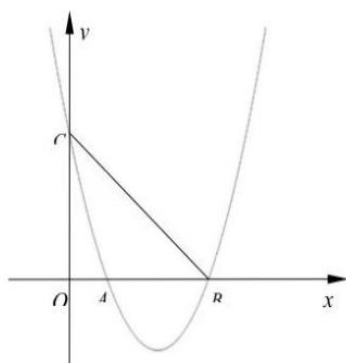
$$\therefore MN=\sqrt{[2-(-2)]^2+[6-(-6)]^2}=4\sqrt{10}.$$

2023 年静安区二模第 24 题

24. (本题满分 12 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 4x + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴分别交于点 $A(1, 0)$ 、点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 联结 BC , 点 P 在线段 BC 上, 设点 P 的横坐标为 m .

- (1) 求直线 BC 的表达式;
- (2) 如果以 P 为顶点的新抛物线经过原点, 且与 x 轴的另一个交点为 D :
 - ① 求新抛物线的表达式 (用含 m 的式子表示), 并写出 m 的取值范围;
 - ② 过点 P 向 x 轴作垂线, 交原抛物线于点 E , 当四边形 $AEDP$ 是一个轴对称图形时, 求新抛物线的表达式.



解法分析： 本题第 (1) 问考察待定系数法求一次函数解析式, 第 (2) 问先设出点 P 的坐标, 第 ① 问利用顶点式设出新抛物线的解析式, 再将原点代入即可求解, 第 ② 问需要对点 D 的位置关系分类讨论,

【详解】(1) 解：把 $A(1,0)$ 、 $B(3,0)$ 代入抛物线解析式中得：

$$\begin{cases} a-4+c=0 \\ 9a-12+c=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=x^2-4x+3$,

在 $y=x^2-4x+3$ 中，令 $x=0$ ，则 $y=3$ ， $\therefore C(0,3)$ ；

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3k+b=0 \\ b=3 \end{cases}, \therefore \begin{cases} k=-1 \\ b=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$ ；

【详解】(2) 解：① $\because$ 点 P 在线段 BC 上，点 P 的横坐标为 m 。

$$\therefore P(m, -m+3),$$

$\therefore$ 可设新抛物线解析式为 $y=a'(x-m)^2-m+3$,

$\because$ 新抛物线经过原点， $\therefore a'(0-m)^2-m+3=0$,

$$\therefore a'=\frac{m-3}{m^2},$$

$\therefore$ 新抛物线解析式为 $y=\frac{m-3}{m^2}(x-m)^2-m+3$,

$\because$ 点 P 在线段 BC 上，

$$\therefore 0 < m < 3;$$

② $\because$ 新抛物线解析式为 $y=\frac{m-3}{m^2}(x-m)^2-m+3$ 与 x 轴的一个交点为原点，对称轴为直线 $x=m$ ，

$\therefore$ 新抛物线解析式为 $y=\frac{m-3}{m^2}(x-m)^2-m+3$ 与 x 轴的另一个交点 D 的坐标为 $(2m,0)$ ，

$\because PE \perp x$ 轴，

$$\therefore E(m, m^2-4m+3);$$

当四边形 $AEDP$ 关于 AD 对称时，则 $-m+3=-m^2+4m-3$ ，

解得 $m=2$ 或 $m=3$ (舍去)，

$\therefore$ 新抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1$ ；

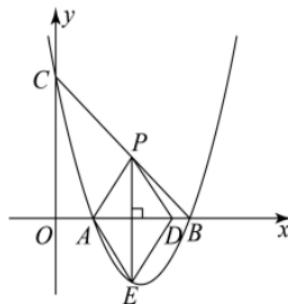
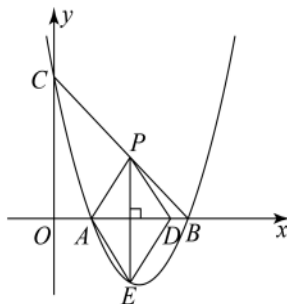
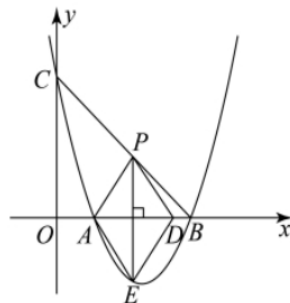
当四边形 $AEDP$ 关于 PE 对称时，

$\because$ 点 D 与 O 关于 PE 对称，

$\therefore$ 点 D 与点 A 不关于 PE 对称，

$\therefore$ 此种情况不成立；

综上所述，新抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1$ 。



24. (本题满分12分, 第(1)小题8分, 第(2)小题4分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3$ 的顶点为 A , 与 y 轴相交于点 B , 异于顶点 A 的点 $C(2, n)$ 在该抛物线上.

(1) 如图10, 点 B 的坐标为 $(0, 1)$.

①求点 A 的坐标和 n 的值;

②将抛物线向上平移后的新抛物线与 x 轴的一个交点为 D , 顶点 A 移至点 A_1 , 如果四边形 $DCAA_1$ 为平行四边形, 求平移后新抛物线的表达式;

(2) 直线 AC 与 y 轴相交于点 E , 如果 $BC \parallel AO$ 且点 B 在线段 OE 上, 求 m 的值.

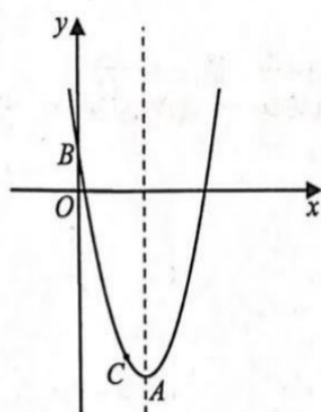


图 10

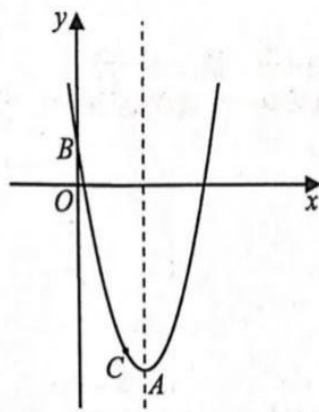
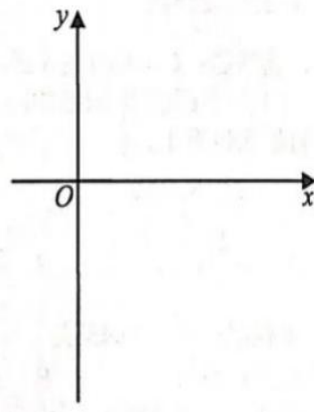


图 10



备用图

解法分析： 本题主要考察了二次函数背景下求函数解析式、第(2)问考察平行四边形存在性问题, 第(3)问考察根据直线平行求参数值问题

解: (1) ① 根据题意, 可得 $1 = 2m - 3$,

解得 $m = 2$.

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y = x^2 - 6x + 1$. (2 分)

$\because y = (x - 3)^2 - 8 \quad \therefore$ 点 $A(3, -8)$ (1 分)

把点 $C(2, n)$ 代入, 得 $n = -7$ (1 分)

② 点 $C(2, -7)$

由题意可得, $DC \parallel AA_1$, $AA' \perp x$ 轴

$\therefore DC \perp x$ 轴 $\therefore DC = 7$ (2 分)

$\because$ 四边形 $DCAA'$ 是平行四边形,

$\therefore AA_1 = DC = 7$ 即抛物线向上平移 7 个单位 (1 分)

$\therefore$ 平移后的新抛物线的表达式 $y = (x - 3)^2 - 1$ (1 分)

(2) 由题意可得 $C(2, -2m - 3)$ 点 $B(0, 2m - 3)$

$\because y = x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 3 = (x - m - 1)^2 - m^2 - 4$

$\therefore$ 点 $A(m + 1, -m^2 - 4)$ (1 分)

可得 $l_{BC}: y = -2mx + 2m - 3$, $l_{OA}: y = \frac{-m^2 - 4}{m + 1}x$

$\because BC \parallel AO \quad \therefore -2m = \frac{-m^2 - 4}{m + 1}$ 解得 $m = -1 \pm \sqrt{5}$ (2 分)

可得 $l_{AC}: y = -(m - 1)x - 5 \quad \therefore$ 点 $E(0, -5)$

$\because$ 点 B 在线段 OE 上 $\therefore m = -1 + \sqrt{5}$ (1 分)

二次函数下字母取值范围问题

2023 年普陀区二模 24 题考察了二次函数背景下与直线旋转和字母参数取值范围问题

24. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 4 分, 第(2) ①小题满分 4 分, 第(2) ②小题满分 4 分)

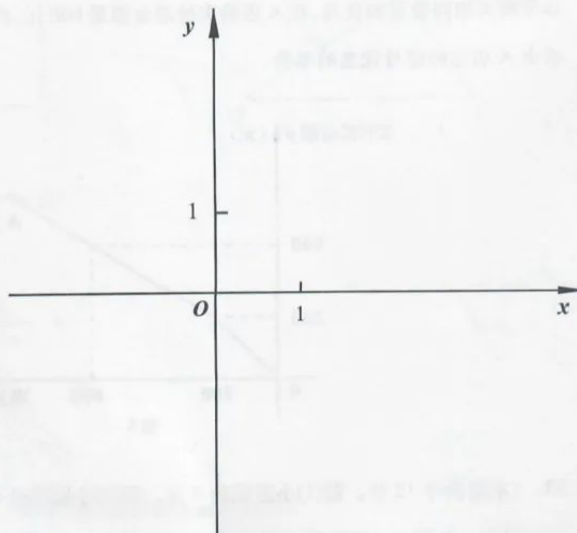
在平面直角坐标系 xOy 中 (如图 10), 已知抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 抛物线的顶点为点 D .

(1) 求抛物线的表达式, 并写出点 D 的坐标;

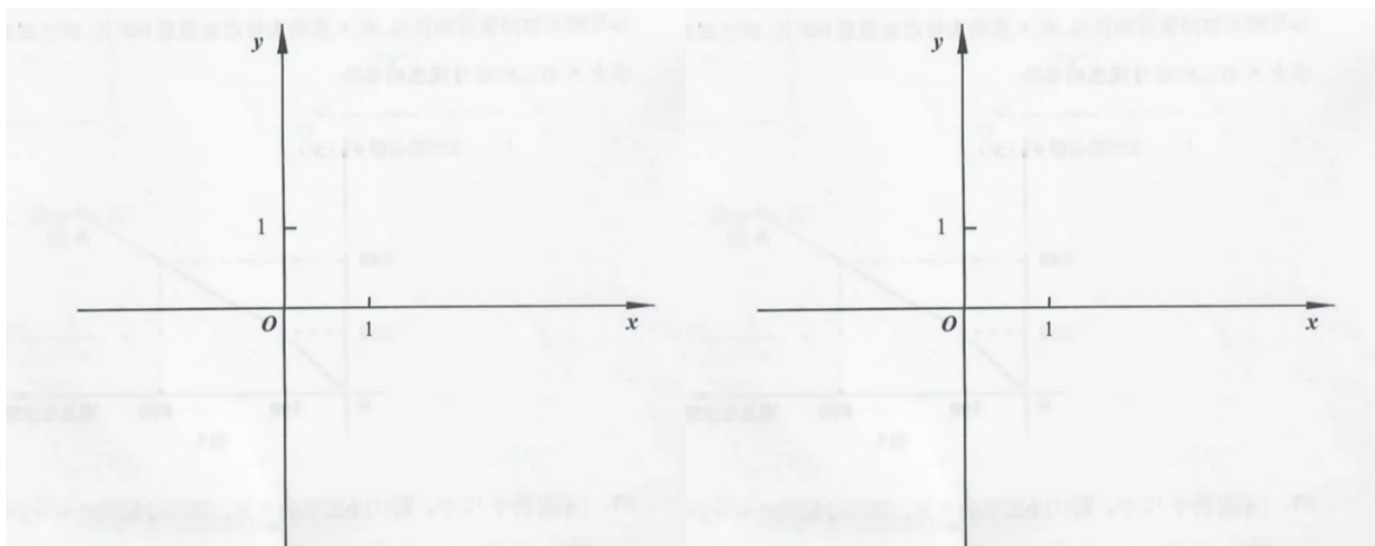
(2) 将直线 BC 绕点 B 顺时针旋转, 交 y 轴于点 E . 此时旋转角 $\angle EBC$ 等于 $\angle ABD$.

①求点 E 的坐标;

②二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图像始终有一部分落在 $\triangle ECB$ 的内部, 求实数 b 的取值范围.



解法分析: 本题第 (1) 问利用待定系数法求出函数解析式, 然后再求出 D 点的坐标, 本题的第 (2) 问的第 ① 问根据角相等, 利用正切值相等求解, 第 ② 问主要根据点 E 和点 B 确定临界位置从而求出 b 的范围;



解：由抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和 $B(3, 0)$ ，

$$\text{得} \begin{cases} a + 2 + c = 0, \\ 9a - 6 + c = 0. \end{cases} \quad \text{解得 } a = 1, \quad c = -3.$$

所以，抛物线的表达式是 $y = x^2 - 2x - 3$ ，点 D 的坐标为 $(1, -4)$ 。

$$(2) \text{ ①} \because BC^2 = 18, \quad CD^2 = 2, \quad BD^2 = 20, \quad \text{得 } BC^2 + CD^2 = BD^2. \therefore \angle BCD = 90^\circ.$$

$$\text{所以 } \tan \angle CBD = \frac{1}{3}.$$

$$\because \angle EBC = \angle ABD, \quad \therefore \angle EBA = \angle CBD. \text{ 可得 } \tan \angle EBA = \tan \angle CBD.$$

$$\text{在 Rt } \triangle EOB \text{ 中, 由 } \frac{EO}{OB} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } EO = 1.$$

所以点 E 的坐标为 $(0, 1)$ 。

$$\text{②由二次函数 } y = x^2 + 2bx + b^2 - 1 \text{ 图像的开口向上, 顶点坐标为 } (-b, -1),$$

可知顶点始终在直线 $y = -1$ 上运动。

当二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图像经过点 E 时，

$$\text{可得 } b = \pm\sqrt{2}. \text{ 结合图像的右半支经过点 } E, \text{ 所以 } b \text{ 取 } \sqrt{2}.$$

当二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图像经过点 B 时，

$$\text{可得 } b = -2 \text{ 或 } b = -4. \text{ 结合图像的左半支经过点 } B, \text{ 所以 } b \text{ 取 } -4.$$

$$\therefore \text{实数 } b \text{ 的取值范围为 } -4 < b < \sqrt{2}.$$