

目录

● 25初二数学期中复习讲义

版块一：代数方程	第1页
版块二：相交线与平行线	第2页
版块三：函数几何综合	第3页

● 25初二数学期中压轴题汇编

压轴一、分式方程的含参压轴题型	第5页
压轴二、分式方程的无解与增根压轴题型	第7页
压轴三、二元二次方程压轴题型	第9页
压轴四、一次函数增减性求最值	第10页
压轴五、一次函数与不等式、方程组	第14页
压轴六、无理方程的阅读材料问题	第16页
压轴七、分式方程的实际综合应用	第20页
压轴八、一次函数动点问题	第23页

目录

压轴九、一次函数翻折问题 | 第26页

压轴十、一次函数规律问题 | 第30页

压轴十一、一次函数最值问题 | 第33页

压轴十二、一次函数中的存在性问题 | 第36页

压轴十三、一次函数的综合应用 | 第38页

压轴十四、一次函数与反比例函数综合应用 | 第41页

压轴十五、一次函数几何综合应用 | 第41页

● 模拟练习卷

模拟练习卷 | 第47页

25初二数学期中复习讲义

版块一：代数方程

1. 已知，关于 x 的方程：
$$\frac{3}{x+1} + \frac{6}{x-1} = \frac{mx}{(x+1)(x-1)}.$$

(1) 若方程有增根，求 m 的取值；

(2) 若方程无解，求 m 的取值；

(3) 若方程的解为整数，求整数 m 的值.

2. 对于有理数 x, y ，定义新运算： $x \# y = ax + by$ ， $x \oplus y = ax - by$ ，其中 a, b 是常数. 已知 $1 \# 1 = 1$ ， $3 \oplus 2 = 8$.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x \# y = 4 - m \\ x \oplus y = 5m \end{cases}$ 的解也满足方程 $x + y = 3$ ，求 m 的值；

(3) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1 x \# b_1 y = c_1 \\ a_2 x \oplus b_2 y = c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = -6 \end{cases}$ ，求关于 x, y 的方程组

$\begin{cases} 2a_1(x+y)^2 \# 3b_1(x-y)^3 = 4c_1 \\ 2a_2(x+y)^2 \oplus 3b_2(x-y)^3 = 4c_2 \end{cases}$ 的解.

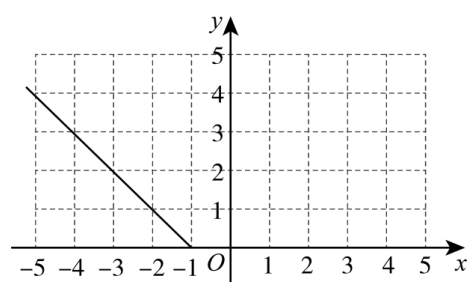
版块二：一次函数

1.学习函数时，王老师带领同学们探索了函数 $y=|x+1|$ 的图象和性质，部分过程如下：自变

量 x 的取值范围是全体实数， y 与 x 的几组对应值如下表所示：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	3	2	1	0	1	2	3	4	5	...

根据表格中的数据，在如图所示的平面直角坐标系中描点，并画出了函数图象的一部分．

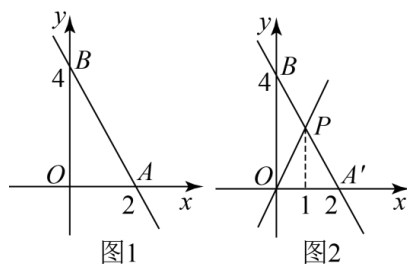


(1)请补全该函数的图象；

(2)观察该函数图象，写出该函数的一条性质：_____；

(3)已知函数 $y=|x+n|$ （其中 n 为常量），当自变量的取值范围是 $-2 \leq x \leq 2$ 时，该函数的最大值为 $n+3$ ，请求出满足条件的 n 的值．

2.数形结合是解决数学问题的一种重要的思想方法,借助图的直观性,可以帮助我们理解数学问题.如图1,已知一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数,且 $k \neq 0$)的图象.



(1)方程 $kx+b=0$ 的解为_____,不等式 $kx+b < 4$ 的解集为_____;

(2)若正比例函数 $y=mx$ (m 为常数,且 $m \neq 0$)与一次函数 $y=kx+b$ 相交于点 P (如图2),

则不等式组 $\begin{cases} mx > 0 \\ kx+b > 0 \end{cases}$ 的解集为_____;

(3)比较 mx 与 $kx+b$ 的大小 (根据图象直接写出结果).

版块三：函数几何综合

1.美国总统伽菲尔德利用图1验证了勾股定理,过等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的直角顶点 C 作直线 l ,再过点 A 作 $AG \perp l$ 于点 G ,过点 B 作 $BH \perp l$ 于点 H ,易证得: $\triangle AGC \cong \triangle CHB$.我们称这种全等模型为“K型全等”(无需证明).

【模型应用】

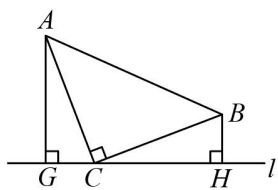
(1)如图2,在平面直角坐标系中,等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$,点 A 的坐标为 $(0,6)$,点 C 的坐标为 $(2,0)$,则点 B 的坐标为_____;

(2)如图3,在平面直角坐标系中,直线 $l_1:y=-3x+6$ 分别交 x 轴, y 轴于点 C 、点 A ,将直线 AC 绕点 A 逆时针旋转 45° 得到直线 l_2 ,则直线 l_2 的函数表达式为_____;

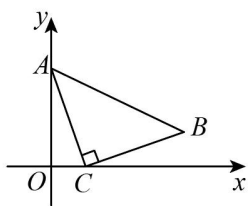
(3)如图4,在平面直角坐标系中,一次函数 $y=-x+2$ 的图像分别交 x 轴, y 轴于点 C 、点 A ,点 P , Q 是正比例函数 $y=kx$ ($k < 0$)图像上两点,若 $CQ \perp PQ$, $CQ=1$,则点 A 到直线 PQ 的距离为_____;

【模型拓展】

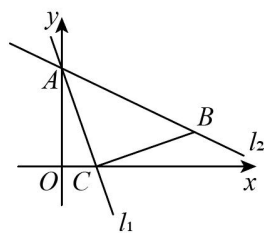
(4)如图5,在平面直角坐标系中,点 B 的坐标为 $(5,2)$,过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 C ,作 $BA \perp y$ 轴于点 A ,点 N 是线段 BC 上一点,点 M 在直线 $y=x+1$ 上.当点 A , M , N 构成等腰直角三角形时,直接写出点 M 的横坐标_____.



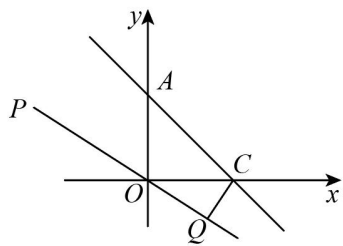
(图1)



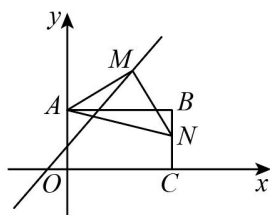
(图2)



(图3)



(图4)



(图5)

25初二数学期中压轴题汇编

压轴一、分式方程的含参压轴题型

1. 关于 x 的分式方程: $\frac{x}{x-3} = \frac{6-m}{3-x}$.

(1) 当 $m=2$ 时, 求此时方程的解.

(2) 若这个方程 $\frac{x}{x-3} = \frac{6-m}{3-x}$ 的解为正数, 求 m 的取值范围.

2. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2} + \frac{m}{x-2} = -2$

(1) 当 $m=5$ 时, 求方程的解;

(2) 当 m 取何值时, 此方程无解;

(3) 当此方程的解是正数时, 求 m 的取值范围.

3. 小华在解分式方程时, 由于印刷问题, 有一个数“?”看不清楚;

解方程 $\frac{2x}{x-2} - \frac{?}{2-x} = 3$

(1) 她把这个数“?”猜成 -3 , 请你帮小华解这个分式方程;

(2) 小华的妈妈说: “如果方程的增根是 $x=2$, 原分式方程无解”, 设原分式方程中“?”代表的数为 m , 请你求出 m 的值

(3) 小华的妈妈说: “如果方程的解为正数,” 设原分式方程中“?”代表的数为 k , 请你求出 k 的取值范围.

4. 新定义：如果两个实数 a, b 使得关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x}+1=b$ 的解是 $x=\frac{1}{a+b}$ 成立，那么我们就把实数 a, b 组成的数对 $[a, b]$ 称为关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x}+1=b$ 的一个“关联数对”. 例如： $a=2, b=-5$ 使得关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x}+1=-5$ 的解是 $x=\frac{1}{2+(-5)}=-\frac{1}{3}$ 成立，所以数对 $[2, -5]$ 就是关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x}+1=b$ 的一个“关联数对”.

(1) 判断下列数对是否为关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x}+1=b$ 的“关联数对” (若是，请在括号内打“√”. 若不是，打“×”).

① $[-1, -1]$ ();

② $[3, -5]$ ().

(2) 若数对 $[n^2-3, -n^2]$ 是关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x}+1=b$ 的“关联数对”，求 n 的值.

(3) 若数对 $[m-k, k]$ ($m \neq -1$ 且 $m \neq 0, k \neq 1$) 是关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x}+1=b$ 的“关联数对”，且关于 x 的方程

$kx-m+1=\frac{-2m}{m+1}x$ 有整数解，求整数 m 的值.

5. 对于形如 $x+\frac{m}{x}=n$ (m, n 为常数) 的分式方程，若 $m=ab, n=a+b$ ，容易验证 $x_1=a, x_2=b$ 是分式方程 $x+\frac{m}{x}=n$ 的解.

例如： $x+\frac{2}{x}=3$ 可化为 $x+\frac{1 \times 2}{x}=1+2$ ，所以 $x_1=1, x_2=2$ 是方程 $x+\frac{2}{x}=3$ 的解；又如 $x+\frac{6}{x}=-5$ 可化为 $x+\frac{(-2) \times (-3)}{x}=(-2)+(-3)$ ，所以 $x_1=-2, x_2=-3$ 是方程 $x+\frac{6}{x}=-5$ 的解.

根据上面材料解答下列问题：

【材料理解】

(1) 方程 $x+\frac{8}{x}=6$ 的两个解分别为 $x_1=$ _____, $x_2=$ _____ ($x_1 < x_2$);

【类比引申】

(2) 若 $x_1=a, x_2=b$ 分别是方程 $x+\frac{-1}{x}=2$ 的两个解，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值；

【拓展提升】

(3) 若关于 x 的方程 $x+\frac{k^2+3k}{x-2}=2k+5$ 的两个解分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，求 $\frac{x_2-3}{2x_1}$ 的值.

压轴二、分式方程的无解与增根压轴题型

6. 关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{mx}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$.

(1) 当 m 为何值时, 分式方程有增根;

(2) 当 m 为何值时, 分式方程无解.

7. 已知, 关于 x 的方程: $\frac{3}{x+1} + \frac{6}{x-1} = \frac{mx}{(x+1)(x-1)}$.

(1) 若方程有增根, 求 m 的取值;

(2) 若方程无解, 求 m 的取值;

(3) 若方程的解为整数, 求整数 m 的值.

8. 判断下列各题, 正确的在题后括号内打“√”, 错误的打“×”.

(1) $\frac{y+1}{3} = \frac{y-1}{5}$ 是关于 y 的分式方程. ()

(2) 分式方程 $\frac{|x|-3}{x+5} = 0$ 的解是 $x=3$. ()

(3) 只要是分式方程, 一定出现增根. ()

(4) 方程 $\frac{5}{x} = \frac{7}{x-2}$ 与方程 $5(x-2) = 7x$ 的解相同. ()

(5) 方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$ 的两边都乘以 $(x-2)$, 得 $1 = (x-1) - 3$. ()

(6) 方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$ 无解. ()

(7) 方程 $\frac{x}{x^2+x} = \frac{2x}{x^2-x}$ 的根为 $x=0$. ()

(8) 方程 $\frac{x(x+1)}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$ 变形得 $x=1$, 而 $x=1$ 是原方程的增根, 故原方程无解. ()

9. (1) 先化简, 再求值: $(a-3b)(a+3b)+(a-3b)^2$, 其中 $a=-3, b=\frac{1}{3}$.

(2) 小丁和小迪分别解方程 $\frac{x}{x-2}-\frac{x-3}{2-x}=1$ 过程如下:

小丁: 解: 去分母, 得 $x-(x-3)=x-2$ 去括号, 得 $x-x+3=x-2$ 合并同类项, 得 $3=x-2$ 解得, $x=5$ $\therefore$ 原方程的解是 $x=5$	小迪: 解: 去分母, 得 $x+(x-3)=1$ 去括号, 得 $x+x+3=1$ 合并同类项, 得 $2x-3=1$ 解得, $x=2$ 经检验 $x=2$ 是方程的增根, 原方程无解.
--	--

你认为小丁和小迪的解法是否正确, 若正确, 打“√”, 如果错误, 请写出正确的解答过程

10. 阅读下列材料:

在学习“分式方程及其解法”的过程中, 老师提出一个问题: 若关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x-4}=1$ 的解为正数, 求 a 的取值范围. 经过独立思考与分析后, 小明和小聪开始交流解题思路, 小明说: 解这个关于 x 的方程, 得到方程的解为 $x=a+4$, 由题目可得 $a+4>0$, 所以 $a>-4$, 问题解决. 小聪说: 你考虑的不全面, 还必须保证 $a \neq 0$ 才行.

(1) 请回答: 谁的说法是正确的, 正确的理由是 .

完成下列问题:

(2) 已知关于 x 的方程 $\frac{m}{x-3}-\frac{x}{3-x}=2$ 的解为非负数, 求 m 的取值范围;

(3) 若关于 x 的方程 $\frac{3-2x}{x-3}+\frac{nx-2}{x-3}=-1$ 无解, 求 n 的值.

压轴三、二元二次方程压轴题型

11. 若规定 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 如 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 3 \times (-1) = 3$

(1) 计算: $\begin{vmatrix} -25 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(2) 计算: $\begin{vmatrix} x-y \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) 解方程组: $\begin{cases} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ y & x \end{vmatrix} = 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = -5 \end{cases}$.

12. 对于有理数 x, y , 定义新运算: $x \# y = ax + by$, $x \oplus y = ax - by$, 其中 a, b 是常数. 已知 $1 \# 1 = 1$, $3 \oplus 2 = 8$.

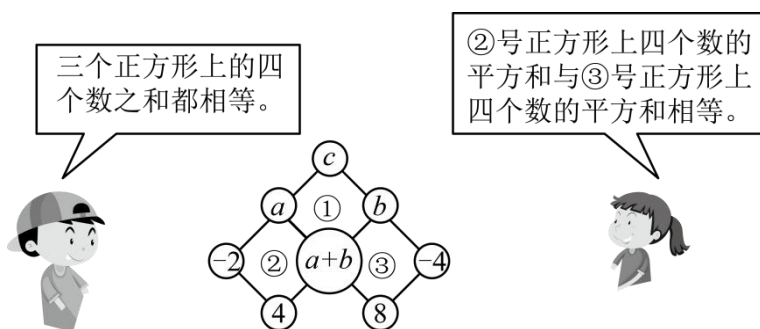
(1) 求 a, b 的值;

(2) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x \# y = 4 - m \\ x \oplus y = 5m \end{cases}$ 的解也满足方程 $x + y = 3$, 求 m 的值;

(3) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1 x \# b_1 y = c_1 \\ a_2 x \oplus b_2 y = c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = -6 \end{cases}$, 求关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} 2a_1(x+y)^2 \# 3b_1(x-y)^3 = 4c_1 \\ 2a_2(x+y)^2 \oplus 3b_2(x-y)^3 = 4c_2 \end{cases} \text{ 的解.}$$

13. 两位同学设计一款填数游戏, 根据下图信息解决问题.



(1) 求 a, b 的数量关系;

(2) 求 c 的值.

14. 阅读材料，解答问题

材料：利用解二元一次方程组的代入消元法可解形如 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \cdots \cdots (1) \\ x - y = 1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$ 的方程组.

如：由 (2) 得 $y = x - 1$ ，代入 (1) 消元得到关于 x 的方程：

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0, \therefore x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{将 } x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \text{ 代入 } y = x - 1 \text{ 得： } y_1 = y_2 = -\frac{1}{2}, \therefore \text{方程组的解为 } \begin{cases} x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \\ y_1 = y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

请你用代入消元法解方程组： $\begin{cases} x + y = 2 \cdots \cdots (1) \\ 2x^2 - y^2 = 1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$

15. 阅读材料：善于思考的小军在解方程组 $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \text{ ①} \\ 4x + 11y = 5 \text{ ②} \end{cases}$ 时，采用了一种“整体代换”的解法：

解：将方程②变形： $4x + 10y + y = 5$ ，即 $2(2x + 5y) + y = 5$ ③

把方程①代入③得： $2 \times 3 + y = 5$ ， $\therefore y = -1$ ，

所以 $y = -1$ 代入①得 $x = 4$ ， $\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ ，

请你解决以下问题：

(1) 模仿小军的“整体代换”法解方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \text{ ①} \\ 9x - 4y = 19 \text{ ②} \end{cases}$ ，

(2) 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 12y^2 = 47 \text{ ①} \\ 2x^2 + xy + 8y^2 = 36 \text{ ②} \end{cases}$ ，求 $x^2 + 4y^2$ 的值与 xy 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，写出这个方程组的所有整数解.

压轴四、一次函数增减性求最值

16. 已知一次函数 $y = kx + b$ (k, b 是常数，且 $k \neq 0$) 的图象经过 (1,1), (-1,3) 两点.

(1) 求该一次函数解析式；

(2) 若 $-3 \leq x \leq 5$ ，请分别求出函数 y 的最大值和最小值.

17. 已知表格中的两组对应值满足一次函数 $y=kx+b$.

x	0	2
y	2	1

(1)求 k , b 的值;

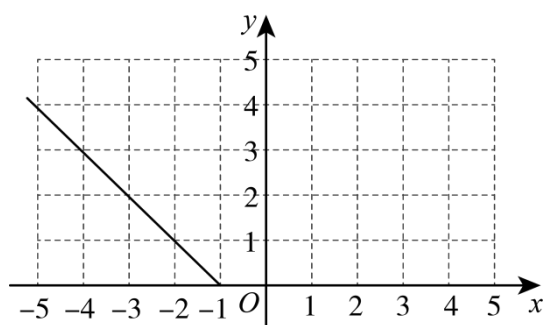
(2)判断点 $P(-4,3)$ 是否在该函数图像上, 并说明理由;

(3)当 $-2 \leq x \leq 3$ 时, 求 y 的最大值.

18. 学习函数时, 王老师带领同学们探索了函数 $y=|x+1|$ 的图象和性质, 部分过程如下: 自变量 x 的取值范围是全体实数, y 与 x 的几组对应值如下表所示:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	3	2	1	0	1	2	3	4	5	...

根据表格中的数据, 在如图所示的平面直角坐标系中描点, 并画出了函数图象的一部分.



(1)请补全该函数的图象;

(2)观察该函数图象, 写出该函数的一条性质: _____;

(3)已知函数 $y=|x+n|$ (其中 n 为常量), 当自变量的取值范围是 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 该函数的最大值为 $n+3$, 请求出满足条件的 n 的值.

19. 八年级某数学兴趣小组在学习了一次函数的图象与性质后,进一步研究了函数 $y=|x|+1$ 的图象与性质.其

探究过程如下:

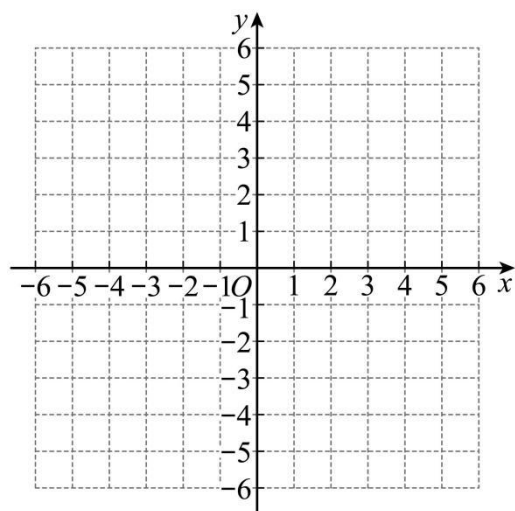
(1)绘制函数图象,

列表:下表是 x 与 y 的几组对应值,其中 $m=$ _.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	4	3	2	1	2	3	m	...

描点:根据表中各组对应值 (x,y) ,在平面直角坐标系中描出各点

连线:顺次连接各点,请你把图象补充完整;



(2)通过观察图象,下列关于该函数的性质表述正确的是:_,(填写代号)

①函数值 y 随 x 的增大而减小;

② $y=|x|+1$ 关于 y 轴对称;

③ $y=|x|+1$ 有最小值 1.

20. 在一次函数的学习中，我们经历了列表，描点，连线画函数图象，结合图象研究函数的性质并对其性

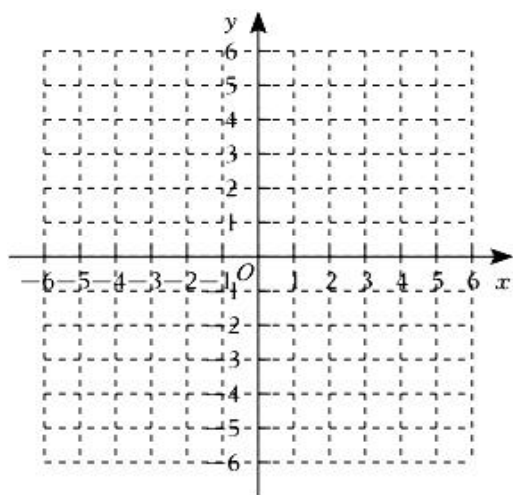
质进行应用的过程．小勇对函数 $y = \begin{cases} 2x+1 & (x \leq 1) \\ 3 & (x > 1) \end{cases}$ 的图象和性质进行如下探究，请同学们认真阅读探究过程

并解答：

(1) 小勇列出表格，请同学们求出 a ， b ，并在平面直角坐标系中画出该函数图象；

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-5	-3	-1	1	a	b	...

$a = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



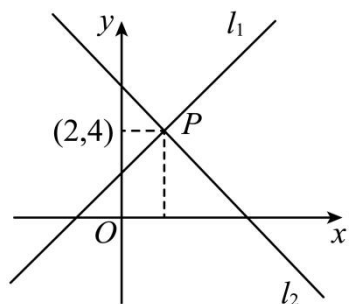
(2) 根据函数图象，以下判断该函数性质的说法，正确的有_____．

- ① 函数图象关于 x 轴对称；
- ② 此函数无最小值；
- ③ 此函数有最大值，且最大值为 3；
- ④ 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大．

(3) 若直线 $y_1 = kx + 2$ 与函数 $y = \begin{cases} 2x+1 & (x \leq 1) \\ 3 & (x > 1) \end{cases}$ 的图象始终有两个交点，请你结合所画函数图象，直接写出 k 的取值范围．

压轴五、一次函数与不等式、方程组

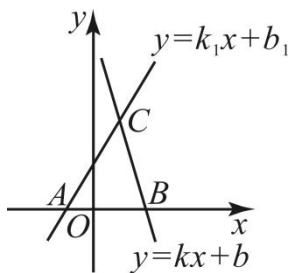
21. 如图, 已知直线 $l_1: y = x + n - 2$ 与直线 $l_2: y = mx + n + 2$ 相交于点 $P(2, 4)$



(1) 求直线 l_1 与直线 l_2 的解析式;

(2) 结合图象直接写出不等式 $x + n - 2 > mx + n + 2$ 的解集.

22. 如图所示, 在同一个坐标系中一次函数 $y = k_1x + b_1$ 和 $y = kx + b$ 的图象, 分别与 x 轴交于点 A 、 B , 两直线交于点 C , 已知点 A 坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 坐标为 $(2, 0)$, 观察图象并回答下列问题:

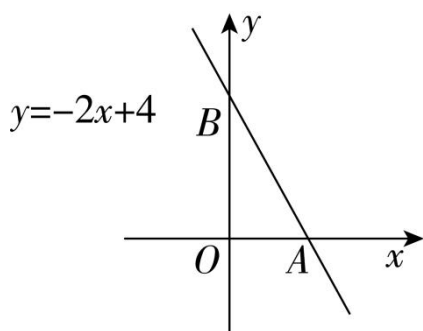


(1) 关于 x 的方程 $k_1x + b_1 = 0$ 的解是_____; 关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是_____;

(2) 直接写出关于 x 的不等式组 $\begin{cases} kx + b > 0 \\ k_1x + b_1 > 0 \end{cases}$ 的解集是_____;

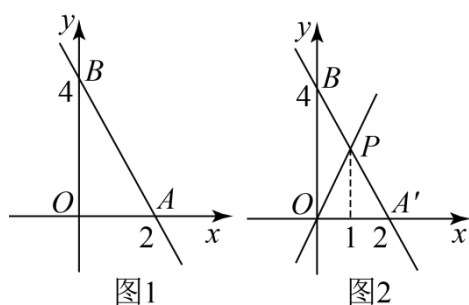
(3) 若点 C 坐标为 $(1, 3)$, 关于 x 的不等式 $k_1x + b_1 > kx + b$ 的解集是_____.

23. 如图, 已知一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 和点 B , 直线 l 的解析式为 $y = mx - 3m + 3$.



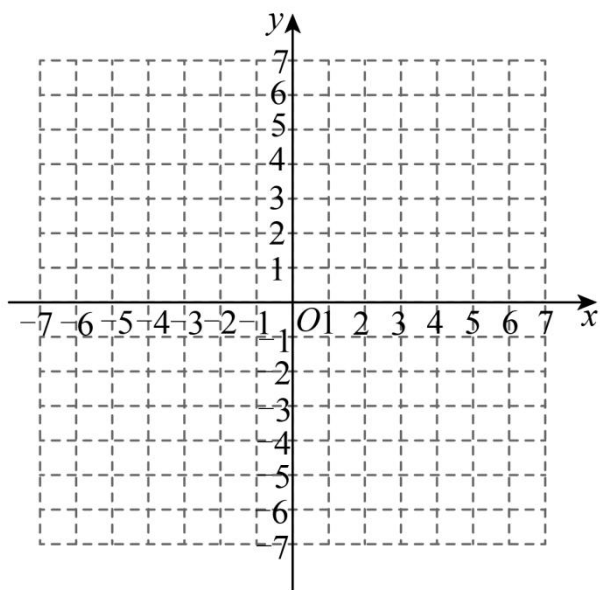
- (1) 求点 A 和点 B 的坐标;
- (2) 当直线 l 经过原点时, 求直线 l 与直线 AB 的交点坐标, 并直接写出方程 $mx - 3m + 3 = -2x + 4$ 的解;
- (3) 若直线 l 与线段 AB 有交点时, 直接写出 m 的取值范围.

24. 数形结合是解决数学问题的一种重要的思想方法, 借助图的直观性, 可以帮助我们理解数学问题. 如图 1, 已知一次函数 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, 且 $k \neq 0$) 的图象.



- (1) 方程 $kx + b = 0$ 的解为_____, 不等式 $kx + b < 4$ 的解集为_____;
- (2) 若正比例函数 $y = mx$ (m 为常数, 且 $m \neq 0$) 与一次函数 $y = kx + b$ 相交于点 P (如图 2), 则不等式组
$$\begin{cases} mx > 0 \\ kx + b > 0 \end{cases}$$
 的解集为_____;
- (3) 比较 mx 与 $kx + b$ 的大小 (根据图象直接写出结果).

25. 已知一次函数 $y_1 = -2x + 2$ 与 $y_2 = x - 4$.



(1) 在同一平面直角坐标系中，画出它们的图象；

(2) 直线 $y_1 = -2x + 2$ ， $y_2 = x - 4$ 与 y 轴分别交于点 A ， B ，请写出 A ， B 两点的坐标；

(3) 根据图象，写出方程组 $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ 的解.

压轴六、无理方程的阅读材料问题

26. 阅读下列“问题”与“提示”后，将解方程的过程补充完整，求出 x 的值.

解方程： $x^2 + 2x + 4\sqrt{x^2 + 2x} - 5 = 0$

提示：可以用“换元法”解方程.

解：设 $\sqrt{x^2 + 2x} = t$ ($t \geq 0$)，则有 $x^2 + 2x = t^2$.

原方程可化为： $t^2 + 4t - 5 = 0$

续解： $(t + 2)^2 = 9$

27. 阅读题：各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想——转化，把未知转化为已知．无理方程（根号下含有未知数的方程） $\sqrt{x+1}=2$ ，可以通过方程两边平方把它转化为 $x+1=4$ ，可得 $x=3$ ．通过“方程两边平方”解方程，有可能产生增根，必须对解得的根进行检验．例如，把方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 两边平方，得 $2x+3=x^2$ ，解得 $x_1=3$ ， $x_2=-1$ ．经检验， $x_2=-1$ 不是原方程的根，是增根．根据上述思想方法，解下列方程：

(1) $\sqrt{3x-2}=x$ ；

(2) $\sqrt{3x+7}=2x$ ．

28. 下面是小明同学解无理方程 $3-\sqrt{2x-3}=x$ 的过程：

原方程可变形为 $3-x=\sqrt{2x-3}$ ……（第一步）

两边平方，得 $3-x=2x-3$ ……（第二步）

整理，得 $-3x=6$ ……（第三步）

解得 $x=2$ ……（第四步）

检验：把 $x=2$ 分别代入原方程的两边，左边 $=3-\sqrt{2x-3}=2$ ，右边 $=2$ ，左边=右边，可知 $x=2$ 是原方程的解．……（第五步）

所以，原方程的解是 $x=2$ ．……（第六步）

请阅读上述小明的解题过程，并完成下列问题：

（1）以上小明的解题过程中，从第 _____步开始出错；

（2）请完成正确求解方程 $3-\sqrt{2x-3}=x$ 的过程．

29. 阅读下列材料，解决问题：

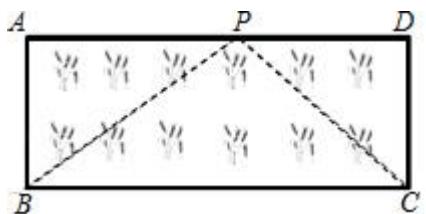
求解一元二次方程，把它转化为两个一元一次方程来解，求解分式方程，把它转化为整式方程来解，由于“去分母”可能产生增根，所以解分式方程必须检验．各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想 - 转化，把未知转化为已知．

用“转化”的数学思想，我们还可以解一些新的方程例如：一元三次方程 $x^3+x^2-2x=0$ ，可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2+x-2)=0$ ，解方程 $x=0$ 和 $x^2+x-2=0$ ，可得方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解．

(1) 方程 $x^3-6x^2-16x=0$ 的解是 $x_1=0$ ， $x_2=$ ____， $x_3=$ ____；

(2) 用“转化”的思想求方程 $(x^2+x-2)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2-6x+4)^2$ 的解；

(3) 应用：如图，已知矩形草坪 $ABCD$ 的长 $AD=8m$ ，宽 $AB=3m$ ，小华把一根长为 $10m$ 的绳子的一端固定在点 B ，沿草坪边沿 BA ， AD 走到点 P 处，把长绳 PB 段拉直并固定在点 P ，然后沿草坪边沿 PD 、 DC 走到点 C 处，把长绳剩下的一段拉直，长绳的另一端恰好落在点 C ．求 AP 的长．



30. 阅读下列两则材料，回答问题：

材料一：我们将 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 与 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 称为一对“对偶式”因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ ，

所以构造“对偶式”相乘可以有效地将 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 和 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 中的“ $\sqrt{\quad}$ ”去掉.例如：已知 $\sqrt{25-x} - \sqrt{15-x} = 2$ ，

求 $\sqrt{25-x} + \sqrt{15-x}$ 的值. 解：

$$(\sqrt{25-x} - \sqrt{15-x}) \times (\sqrt{25-x} + \sqrt{15-x}) = (25-x) - (15-x) = 10 \because \sqrt{25-x} - \sqrt{15-x} = 2,$$

$$\therefore \sqrt{25-x} + \sqrt{15-x} = 5$$

材料二：如图，点 $A(x_1, y_1)$ ，点 $B(x_2, y_2)$ ，以 AB 为斜边作 $Rt\triangle ABC$ ，则 $C(x_2, y_1)$ ，于是 $AC = |x_1 - x_2|$ ，

$BC = |y_1 - y_2|$ ，所以 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.反之，可将代数式 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 的值看作点 (x_1, y_1)

到点 (x_2, y_2) 的距离.

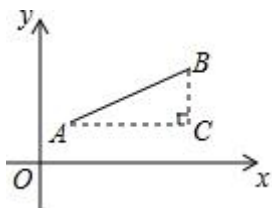
$$\text{例如：} \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2} = \sqrt{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1)} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + [y - (-1)]^2}.$$

所以可将代数式 $\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2}$ 的值看作点 (x, y) 到点 $(1, -1)$ 的距离.

(1) 利用材料一，解关于 x 的方程： $\sqrt{20-x} - \sqrt{4-x} = 2$ ，其中 $x \leq 4$ ；

(2) ① 利用材料二，求代数式 $\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 16y + 65} + \sqrt{x^2 + 4x + y^2 - 4y + 8}$ 的最小值，并求出此时 y 与 x 的函数关系式，写出 x 的取值范围；

② 将①所得的 y 与 x 的函数关系式和 x 的取值范围代入 $y = \sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 6}$ 中解出 x ，直接写出 x 的值.



压轴七、分式方程的实际综合应用

31. 为改善道路通行条件, 某市在 75 周年国庆前夕将城市一段主干道进行拓宽改造. 该项工程若由甲工程队单独施工, 恰好能在规定时间内完成; 若由乙工程队单独施工, 则完成工程所需天数是规定天数的 2 倍. 如果由甲、乙两个工程队先合作施工 6 天, 那么余下的工程由甲工程队单独施工还需 3 天完成.

(1) 求这项工程的规定时间是多少天?

(2) 已知甲工程队每天的施工费用为 3 万元, 乙工程队每天的施工费用为 1.4 万元. 为了缩短工期以减少对交通的影响, 工程指挥部决定该工程由甲、乙两个工程队合作来完成, 则该工程的施工费用是多少?

32. 第九届亚洲冬季运动会于 2025 年 2 月 7 日在黑龙江省哈尔滨市开幕, 吉祥物“滨滨”和“妮妮”均以东北虎为原型创作而成, 两款毛绒玩具销售火爆. 阅读下列素材解决问题.

“滨滨”和“妮妮”	 滨滨 妮妮
素材 1	“滨滨”的单价比“妮妮”的单价少 40 元;
素材 2	购买“滨滨”和“妮妮”的费用分别为 8000 元和 5600 元;
素材 3	“滨滨”的数量是“妮妮”的数量的 2 倍.
问题解决	求吉祥物“滨滨”的单价.

33. 如图 1, 在底面积为 100cm^2 、高为 20cm 长方体水槽内放入一个长方体烧杯, 以恒定不变的流量速度先向烧杯中注水, 注满烧杯后, 继续注水, 直至注满水槽为止, 此过程中, 烧杯本身的质量、体积忽略不计, 烧杯在大水槽中的位置始终不改变, 水槽中水面上升的高度 h (厘米) 和注水时间 t (秒) 之间的关系如图 2 所示.

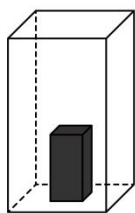


图1

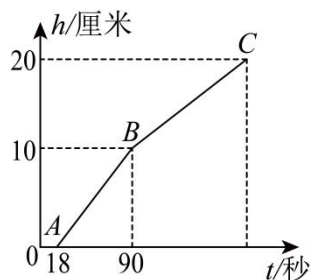


图2

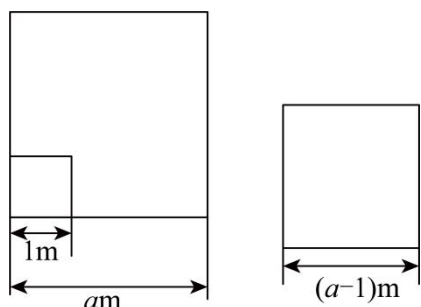
- (1)图2中,点_____表示烧杯中刚好注满水,点_____表示水槽中水面恰与烧杯中水面平齐;
- (2)求注水的速度;
- (3)烧杯的底面积是_____ cm^2 ,注满水槽所需要的时间为_____秒.

34. 2024年,在国家实行报废补贴、以旧换新利好政策的推动下,小明的爸爸准备换车,看中了两款价格相同的国产车.请帮小明父子解决以下问题:

燃油车	新能源车
油箱容积: 50 升	电池容量: 60 千瓦时
油价: 7.2 元/升	电价: 0.6 元/千瓦时
续航里程: a 千米	续航里程: a 千米
每千米行驶费用: $\frac{50 \times 7.2}{a}$ 元	每千米行驶费用: _____元

- (1)用含 a 的式子表示新能源车的每千米行驶费用_____元(结果为最简).
- (2)若燃油车的每千米行驶费用比新能源车多 0.54 元.
- ① 分别求出这两款车的每千米行驶费用.
- ② 若燃油车和新能源车每年的其他费用分别为 4800 元和 7500 元. 每年行驶里程为多少千米时,买新能源车的年费用更低?(年费用=年行驶费用+年其他费用)

35. 2024 年中央一号文件强调“强化农业科技支撑”。为充分发挥科技生产力对农业发展的作用，某地与农业大学合作开发小麦试验田，并利用机械化播种、收割小麦。



(1) 现有 A , B 两种小麦播种机, A 型播种机比 B 型播种机每小时多播种 3hm^2 , A 型播种机播种 90hm^2 所用时间与 B 型播种机播种 60hm^2 所用时间相等, 两种播种机每小时分别播种多少 hm^2 小麦?

(2) 如图, “丰收 1 号”小麦的试验田是边长为 am ($a > 1$) 的正方形去掉一个边长为 $1m$ 的正方形蓄水池后余下的部分. “丰收 2 号”小麦的试验田是边长为 $(a-1)m$ 的正方形. 两块试验田的小麦都收获了 500kg .

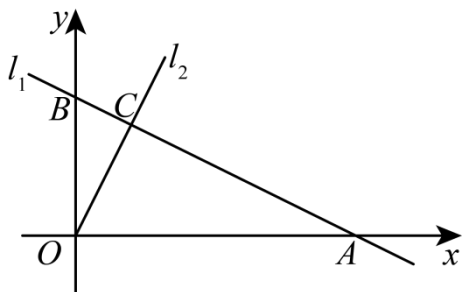
① 哪种小麦的单位面积产量高?

② 请直接写出高的单位面积产量是低的单位面积产量的____倍 (用含 a 的代数式表示);

(3) 一台小麦收割机的工作效率相当于一个农民工作效率的 150 倍, 用这台收割机收割 10hm^2 小麦比 100 个农民人工收割这些小麦要少用 1h , 这台收割机每小时收割多少 hm^2 小麦?

压轴八、一次函数动点问题

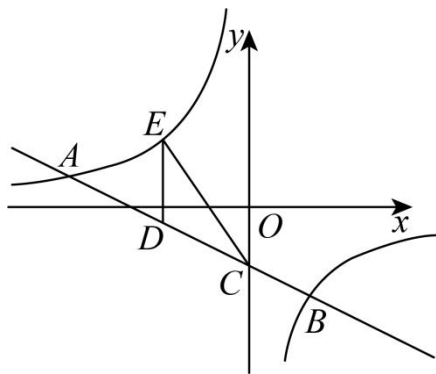
36. 如图①，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 的图象 l_1 与 x ， y 轴分别交于 A ， B 两点，正比例函数 $y = kx$ 的图象 l_2 与 l_1 交于点 $C(2, 4)$ 。



(1) 求 n 、 k 的值；

(2) 已知点 D 是直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + n$ 上的一个动点。连接 OD ，当 $\triangle AOD$ 的面积是 $\triangle BOC$ 面积的 2 倍时，求点 D 的坐标；

37. 如图，一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象相交于 $A(m, 1)$ ， $B(2, n)$ 两点，与 y 轴交于点 C 。



(1) 求一次函数的解析式；

(2) 设 D 为线段 AC 上的一个动点（不包括 A ， C 两点），过点 D 作 $DE \parallel y$ 轴交反比例函数图象于点 E ，当 $\triangle CDE$ 的面积是 3 时，求点 E 的坐标。

38. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AB = 3$, $AD = 4$, $CD = 8$, 连接 BD , 动点 P 从点 A 出发沿折线 $A-B-D$ 方向运动, 动点 Q 从点 C 出发沿 $C-D$ 方向运动, 动点 P, Q 的运动速度均为每秒 1 个单位长度, 当点 P 到达点 D 时, P, Q 两点同时停止运动, 连接 DP, BQ . 设运动的时间为 x 秒 ($0 < x < 8$), 记 $\triangle ADP$ 的面积为 y_1 , $\triangle BCD$ 的面积与 $\triangle BCQ$ 的面积之比为 y_2 .

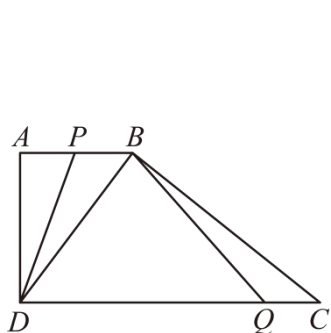


图1

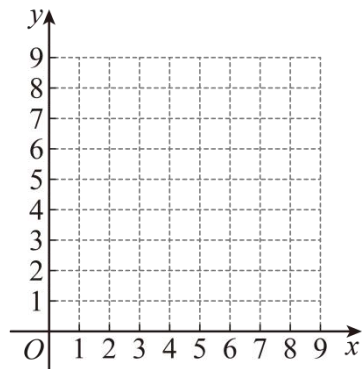


图2

- (1) 请直接写出 y_1 , y_2 分别关于 x 的函数表达式, 并注明自变量 x 的取值范围;
- (2) 在给定的平面直角坐标系中画出函数 y_1 , y_2 的图象, 并写出 y_1 的一条性质;
- (3) 结合函数图象, 请直接写出 $y_1 < y_2$ 时 x 的取值范围 (结果保留小数点后一位, 误差不超过 0.2).

39. 建立模型:

(1) 如图 1, 等腰直角三角形 ABC 的直角顶点在直线 l 上. 过点 A 作 $AD \perp l$ 交于点 D , 过点 B 作 $BE \perp l$ 交于点 E , 求证: $\triangle ADC \cong \triangle CEB$;

(2) 如图 2, 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = 2x + 4$ 分别与 y 轴, x 轴交于点 A, B , 将直线 l_1 绕点 A 顺时针旋转 45° 得到 l_2 , 求 l_2 的函数表达式;

(3) 如图 3, 在平面直角坐标系, 点 $B(6, 4)$, 过点 B 作 $AB \perp y$ 交于点 A , 过点 B 作 $BC \perp x$ 交于点 C , P 为线段 BC 上的一个动点, 点 $Q(a, 2a - 4)$ 位于第一象限. 问点 A, P, Q 能否构成以点 Q 为直角顶点的等腰直角三角形, 若能, 请求出 a 的值; 若不能, 请说明理由.

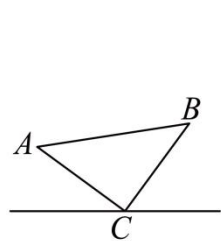


图1

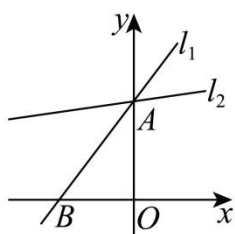


图2

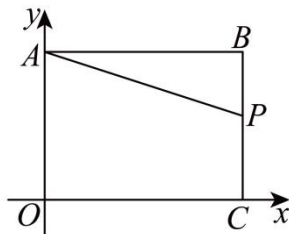


图3

40. 如图 1, 平面直角坐标系中, 直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 的图象 l_1 与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 直线 $y = -x + b$ 的图象 l_2 过点 A , 并且与 y 轴交于点 C .

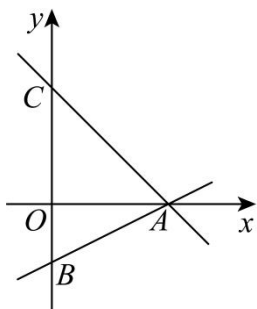


图1

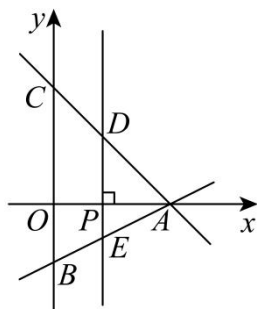


图2

(1) 求 A, B 两点的坐标及 b 的值;

(2) 如图 2, 动点 P 从原点 O 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿 x 轴正方向运动. 过点 P 作 x 轴的垂线, 分别交直线 AC, AB 于点 D, E . 设点 P 运动的时间为 t , 点 D 的坐标为 _____, 点 E 的坐标为 _____; (均用含 t 的式子表示)

(3) 在 (2) 的条件下, 当点 P 在线段 OA 上时, 探究是否存在某一时刻, 使 $DE = OB$? 若存在, 求出此时 $\triangle ADE$ 的面积; 若不存在说明理由;

(4) 一次函数 $y = kx + 2$ 的图象为 l_3 , 且 l_1, l_2, l_3 不能围成三角形, 直接写出 k 的值.

压轴九、一次函数翻折问题

41. 在平面直角坐标系中，直线 $l: y = kx + b (k \neq 0)$ 经过点 $A(-2, 3)$ ，交 y 轴于点 $B(0, 1)$ 。

(1) 求直线 l 所对应的函数表达式。

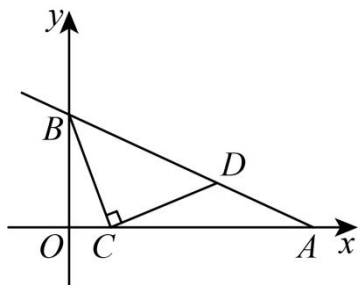
(2) 若点 C 是 y 轴上一点，连接 AC 。当 $\triangle ABC$ 的面积为 5 时，直接写出点 C 的坐标。

(3) 已知线段 MN 的端点坐标分别为 $M(m-1, 2)$ ， $N(m+3, 2)$ 。

① 当直线 l 与线段 MN 有交点时，求 m 的取值范围。

② 已知点 P 是直线 l 上一点，其横坐标为 m 。过点 P 作直线 $l' \perp y$ 轴，将直线 l 在直线 l' 上方部分记作 G_1 ，在直线 l' 上及其下方的部分记为 G_2 ，将 G_1 沿直线 l' 向下翻折得到 G_3 ， G_2 和 G_3 两部分组成的图象记为 G 。当图象 G 与线段 MN 只有一个公共点时，直接写出 m 的取值范围。

42. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴、 y 轴相交于 $A(12, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 两点，点 C 在线段 OA 上，以 CB 为直角边作等腰直角 $\triangle BCD$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，点 D 恰好落在直线 AB 上。

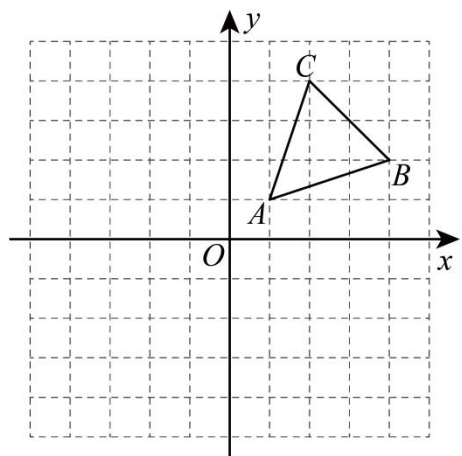


(1) 求 k 、 b 的值；

(2) 求点 D 的坐标；

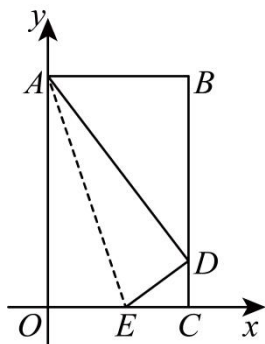
(3) 若将 $\triangle BCD$ 沿直线 AB 翻折到直角坐标系平面得 $\triangle BC'D$ ，求过点 C' 且与直线 AB 平行的直线的解析式。

43. 已知，在如图所示的网格中建立平面直角坐标系后， $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(1,1)$ 、 $B(4,2)$ 、 $C(2,4)$ 。



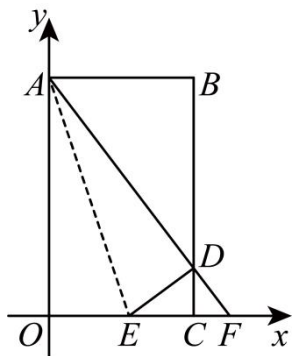
- (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 借助图中的网格，请只用直尺（不含刻度）完成以下要求：在 x 轴上画出一一点 Q ，使得 $\triangle QAB$ 的周长最小，则 Q 点的坐标_____；
- (3) 再把 $\triangle A_1B_1C_1$ 向下平移 3 个单位得到 $\triangle A_2B_2C_2$ 。若 $\triangle ABC$ 内有一点 $P(a,b)$ ，则点 P 经上述翻折、平移后得到的点 P_2 的坐标是_____。

44. 如下图. 分别以长方形 $OABC$ 的边 OC, OA 所在直线为 x 轴、 y 轴, 建立平面直角坐标系, 已知 $AO=10, AB=6$, 点 E 在线段 OC 上, 把 $\triangle OAE$ 以直线 AE 为轴进行翻折, 点 O 的对应点恰好落在线段 BC 上.



(1) 分别求点 D, E 的坐标.

(2) 如下图, 若直线 AD 与 x 轴相交于点 F , 求直线 AD 表达式及点 F 的坐标.



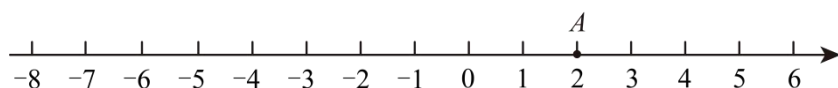
(3) 若点 P 是 x 轴上的一动点, 是否存在以 A, D, P 为顶点的三角形是等腰三角形? 若存在, 直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

45. 探究与应用

【探究发现】

某数学小组的同学在学习完函数及一次函数后，掌握了函数的探究路径，即：定义→图像→性质→应用，他们尝试沿着此路径探究下列情景问题：

点 A 是数轴上一点，表示的数是 2；点 B 是数轴上一动点，若它表示的数是 x ， AB 的距离为 y ．随着 x 的变化， AB 的距离 y 会如何变化呢？



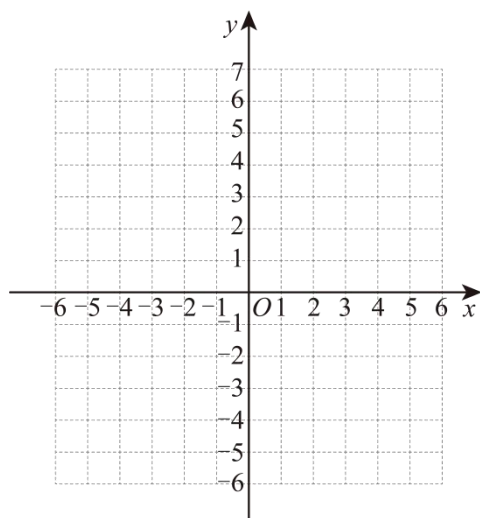
(1)数学小组通过列表得到以下数据：

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	4	m	2	1	0	1	2	3	...

其中 $m = \underline{\quad}$ ．

数学小组发现给定一个 x 的值，就会有唯一的一个 y 值与之对应， y 是 x 的函数吗？ $\underline{\quad}$ （填“是”或“不是”）；

(2)请通过描点、连线画出该函数图象，并根据函数图象写出该函数的一条性质： $\underline{\quad}$ ；



【应用拓展】

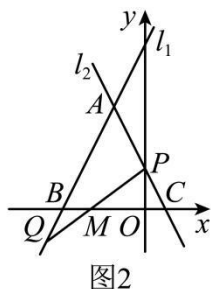
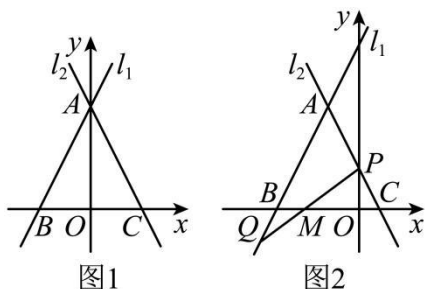
(3)若点 $P(a, n)$ ， $Q(b, n)$ 均在该函数图象上，请直接写出 a ， b 满足的数量关系： $\underline{\quad}$ ；

(4)将该函数图象在直线 $y = 2$ 上方的部分保持不变，下方的图象沿直线 $y = 2$ 进行翻折，得到新函数图象，若一次函数 $y = kx + 3$ 与该函数图象只有一个交点，则 k 的取值范围为 $\underline{\quad}$ ．

(备注：直线 $y = 2$ 即过点 $(0, 2)$ 且与 x 轴平行的直线．)

压轴十、一次函数规律问题

46. 如图 1, 直线 $l_1: y = 2x + 3$ 与 x 轴交于点 B , 直线 l_2 与 x 轴交于点 $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, l_1 、 l_2 交于 y 轴上一点 A .



(1) 求直线 l_2 所对应的函数表达式;

(2) 求证: $AB = AC$;

(3) 规律探究: 将 $\triangle ABC$ 向左平移 m 个单位长度 $\left(0 < m < \frac{3}{2}\right)$ 得到图 2, AC 与 y 轴交于点 P , 在 AB 的延长线上取一点 Q , 使 $BQ = CP$, 连接 PQ 交 x 轴于 M 点. 请探究 $\triangle ABC$ 向左平移的过程中, 线段 MO 的长度的变化情况.

47. 小亮和妈妈去超市买凳子, 小亮发现把凳子按如图方式叠放在一起时, 每叠放一个凳子, 增加的高度是一样的. 下表是叠放凳子的总高度 h 与凳子数量 n 的几组对应值.

凳子的数量 n (张)	1	2	3	4	...
叠放凳子的总高度 h (厘米)	45	50	55	60	...



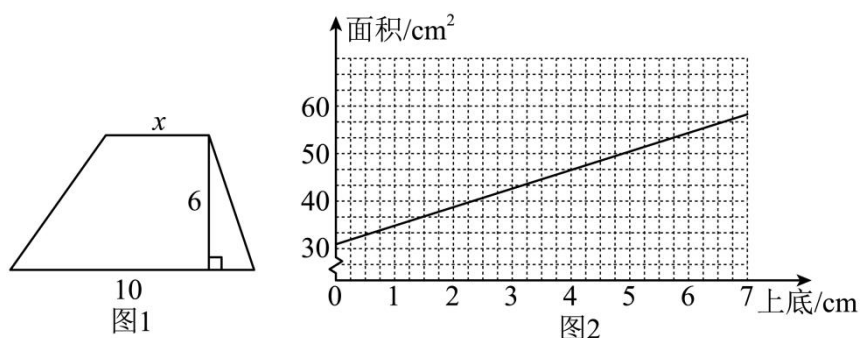
根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 按照表格所示的规律, 当凳子的数量为 6 时, 叠放的凳子总高度为_____厘米;

(2) 按照表格所示的规律, 写出叠放的凳子总高度 h 与凳子的数量 n 之间的关系式_____;

(3) 按照表格所示的规律, 若将该种凳子按如图方式叠放在层高为 92 厘米的超市货架上, 能叠放 11 张凳子吗? 说明理由.

48. 如图，梯形的下底是10cm，高是6cm，设梯形较短的上底为 x cm，面积为 y cm²，面积 y 随上底 x 的变化而变化.



(1) 在这个变化过程中，_____是自变量，_____是因变量.

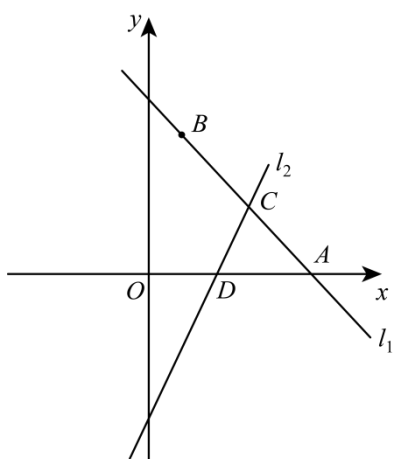
(2) y 与 x 的关系式为： $y =$ _____；

(3) 请根据关系式填写表格：

x	1	2	2.5	_____	8
y	33	_____	_____	45	_____

(4) 小亮用图 2 的图象来表示面积 y 与上底 x 的变化规律，请观察图象回答：梯形的面积 y 随上底 x 的增大而_____；若要使面积 y 大于 39 cm²，则上底 x 的取值范围_____.

49. (1) 如图，已知直线 l_1 经过点 $A(5,0)$ ， $B(1,4)$ ，与直线 $l_2: y=2x-4$ 交于点 C ，且直线 l_2 交 x 轴于点 D .



①求直线 l_1 的函数表达式；

②求点 C 的坐标；

③求 $\triangle ADC$ 的面积.

(2) 观察下列算式，完成问题：

① $4^2 - 2^2 = 12 = 4 \times 3$ ；

② $6^2 - 4^2 = 20 = 4 \times 5$ ；

③ $8^2 - 6^2 = 28 = 4 \times 7$ ；

④ $10^2 - 8^2 = 36 = 4 \times 9$

.....

①按照以上算式的规律，请写出算式⑤_____

②上述算式用文字表述为：“任意两个连续偶数的平方差都是 4 的奇数倍”。若设两个连续偶数分别为 $2n$ 和 $2n+2$ (n 为整数)，请证明上述命题成立；

③命题“任意两个连续奇数的平方差都是 4 的奇数倍”是否成立？若成立，请证明；若不成立，请举出反例。

50. 【问题背景】“刻漏”是我国古代的一种利用水流计时的工具。综合实践小组准备用甲、乙两个透明的竖直放置的容器和一根带节流阀（控制水的流速大小）的软管制作简易计时装置。

【实验操作】综合实践小组设计了如下的实验：先在甲容器里加满水，此时水面高度为 30cm，开始放水后每隔 10min 观察一次甲容器中的水面高度，获得的数据大致如表所示：

流水时间 t / min	0	10	20	30	40
水面高度 h / cm （观察值）	30	29	28	27	26

任务 1：观察水面的高度值的变化规律，每隔 10min 水面高度变化量为_____值（填“定”或“不定”）；

【建立模型】小组讨论发现：“ $t = 0, h = 30$ ”是初始状态下的准确数据，接着水面高度随着流水时间而变化。

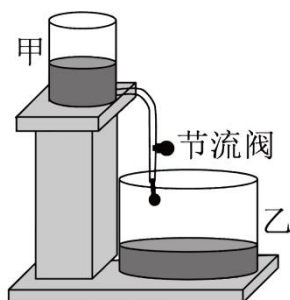
任务 2：请利用表格中“ $t = 0, h = 30$ ； $t = 10, h = 29$ ”两组数据，求水面高度 h 与流水时间 t 的函数解析式；

【模型应用】综合实践小组利用建立的模型，预测了后续的水面高度。

任务 3：当流水时间为 2 小时，求水面高度 h 的值。

【设计刻度】综合实践小组决定利用该装置设计一个计时工具。

任务 4：如何在甲容器外壁设计刻度来估算相应的时间变化？请简要说明。



压轴十一、一次函数最值问题

51. 一次函数 $y = kx - k + 2$ (k 为常数, 且 $k \neq 0$).

(1) 若点 $(-1, 3)$ 在一次函数 $y = kx - k + 2$ 的图象上,

① 求 k 的值;

② 设 $P = y + x$, 则当 $-2 \leq x \leq 5$ 时, 求 P 的最大值.

(2) 若当 $m - 3 \leq x \leq m$ 时, 函数有最大值 M , 最小值 N , 且 $M - N = 6$, 求此时一次函数 y 的表达式.

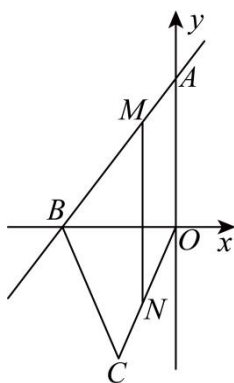
52. 某教育科技公司销售 A, B 两种多媒体, 这两种多媒体的进价与售价如表所示:

	A	B
进价 (万元/套)	3	2.4
售价 (万元/套)	3.3	2.8

(1) 若该教育科技公司计划购进两种多媒体共 50 套, 共需资金 132 万元, 该教育科技公司计划购进 A, B 两种多媒体各多少套?

(2) 若该教育科技公司计划购进两种多媒体共 50 套, 其中购进 A 种多媒体 m 套 ($10 \leq m \leq 20$), 设将购进的两种多媒体全部售出的利润为 w , 请求出 w 与 m 之间的函数关系式, 并求出利润的最大值.

53. 如图, 直线 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 交 y 轴于点 A, 交 x 轴于点 B, 点 $C(-3, t)$ 在第三象限, 点 M 在线段 AB 上, 点 M 的横坐标为 m , 过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交折线 BCO 于 N.



(1) 求点 A, B 的坐标:

(2) 设点 M, N 的纵坐标分别为 y_1, y_2 , 当 $-3 \leq m \leq 0$ 时, $y_1 - y_2$ 为定值, 求 t 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 分别过点 M, N 作 MQ, NP 垂直于 y 轴, 垂足分别为点 Q, P , 当 $-6 \leq m \leq 0$ 时, 求长方形 $MNPQ$ 周长的最大值.

54. 阅读材料:

一次函数 $y = kx + b$ 的图像是一条直线, 因此, 解析式 $y = kx + b$ 也称为直线方程, 也可以表示为 $Ax + By + C = 0$ 的形式.

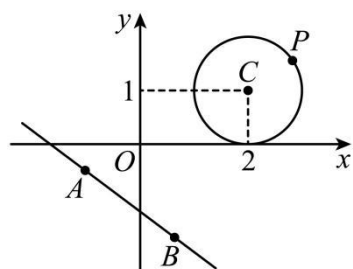
在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式为: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

例如: 求点 $P(0, 0)$ 到直线 $4x + 3y - 3 = 0$ 的距离.

解: 由直线 $4x + 3y - 3 = 0$ 知, $A = 4, B = 3, C = -3$,

$\therefore$ 点 P 到直线 $4x + 3y - 3 = 0$ 的距离 $d = \frac{|4 \times 0 + 3 \times 0 - 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$.

根据以上材料, 解决下列问题:



(1) 问题 1: 点 $P_1(2, 4)$ 到直线 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ 的距离为 _____;

(2) 问题 2: 已知: $\odot C$ 是以点 $C(2, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆, $\odot C$ 与直线相切 $y = 2x + b$, 求实数 b 的值;

(3) 问题 3: 如图, 设点 P 为问题 2 中 $\odot C$ 上的任意一点, 点 A, B 为直线 $2x + 3y + 9 = 0$ 上的两点, 且 $AB = 2$, 请求出 $\triangle ABP$ 面积的最大值和最小值.

55. 情景探究

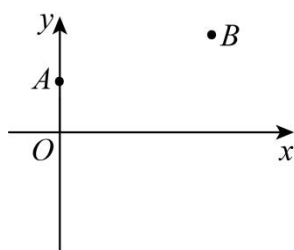


图1

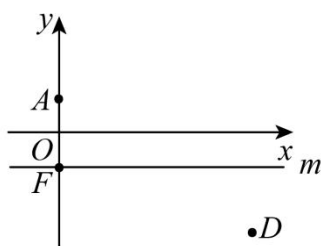


图2

【问题情景】学习了“最短路径问题”后，李老师结合坐标系的知识，设计了下面的问题：如图1，在平面直角坐标系中，已知点 $A(0,1)$, $B(3,2)$, C 为 x 轴上的一个动点，点 C 在什么位置时， $AC+BC$ 的值最小？最小值为多少？

【方法探究】“顶尖”小组先在图1中画出点 A 关于 x 轴的对称点 E ，连接 EB 交 x 轴于点 C ，则此时 $AC+BC$ 的值最小；然后展示了两种求解方案：

方案一：连接 OB ，利用 $S_{\triangle EOB} = S_{\triangle EOC} + S_{\triangle BOC}$ 列方程求出点 C 的坐标。

方案二：求出直线 EB 对应的函数表达式，利用一次函数的图象与性质求出点 C 的坐标。

(1) 点 E 的坐标为_____， $AC+BC$ 的最小值为_____。

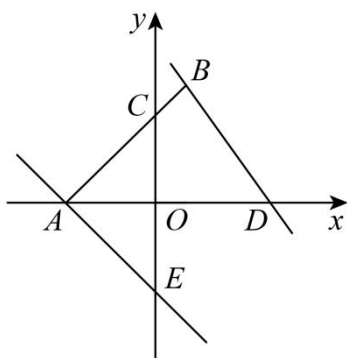
(2) 选择一种你喜欢的方案求出点 C 的坐标。

【推广应用】

(3) 小强受到启发，设计了如下问题：如图2，在平面直角坐标系中，已知点 $A(0,1)$, $D(6,-3)$ ，直线 m 经过点 $F(0,-1)$ ，且与 x 轴平行，分别在 x 轴和直线 m 上找点 P, Q ，使得 $PQ \perp x$ 轴，且 $AP+DQ$ 的值最小，求出点 P, Q 的坐标。

压轴十二、一次函数中的存在性问题

56. 在平面直角坐标系中, $A(-3,0)$, $B(1,4)$, 连接 AB 交 y 轴于 C .

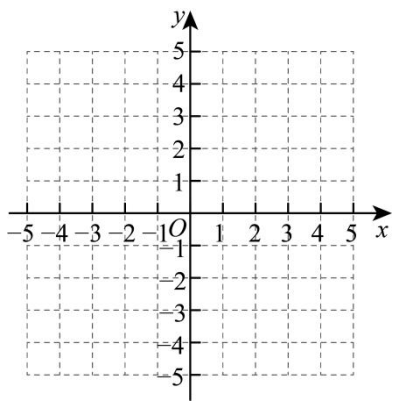


(1) 求 AC 的长;

(2) 如图, 直线 BD 交 x 轴于 $D(4,0)$, 将直线 BD 平移经过点 A , 交 y 轴于 E , 在直线 AE 上是否存在点 Q ,

使得 $S_{\triangle ACQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD}$, 若存在, 求出点 Q 的坐标, 若不存在, 说明理由.

57. 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 各个顶点的坐标分别是 $A(1,2), B(4,1), C(3,4)$.

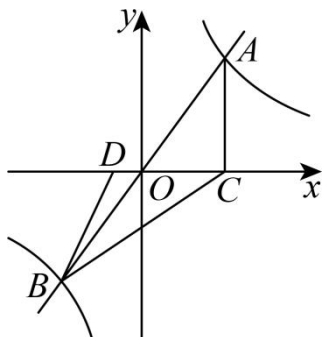


(1) 画出 $\triangle ABC$, 标出 A, B, C 三点;

(2) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$, 其中 A_1 的坐标为 _____;

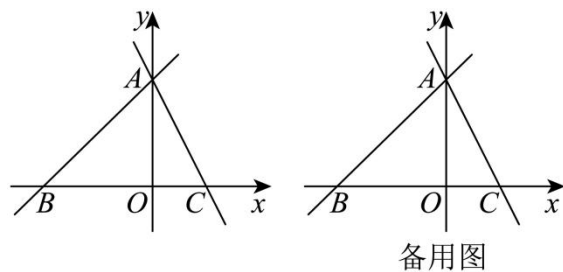
(3) 在 x 轴上是否存在一点 P , 使得 $\triangle PAB$ 的周长最小? 若存在, 直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

58. 如图，在平面直角坐标系中，正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象相交于 A、B 两点， $AC \perp x$ 轴于点 $C(3,0)$ ，点 D 的坐标为 $(-1,0)$ ，连接 BC、BD。



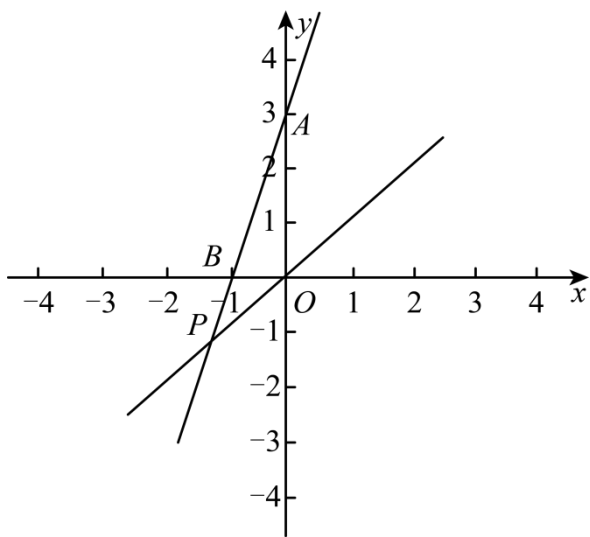
- (1) 求该反比例函数的表达式；
- (2) 在该反比例函数的图象上是否存在点 E，使得 $\triangle ACE$ 的面积与 $\triangle BCD$ 的面积相等？若存在，请求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由。

59. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = kx + b$ 与 x 轴交于点 $B(-4,0)$ ，与 y 轴交于点 A，直线 $y = -2x + 4$ 过点 A，且与 x 轴交于点 C。



- (1) 求直线 AB 的函数表达式；
- (2) 若线段 AC 上有一点 M，使得 $S_{\triangle OCM} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOC}$ ，求直线 OM 的函数表达式；
- (3) 在直线 AB 上是否存在点 P，使得 $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle AOB}$ ？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

60. 如图, 已知 $y = 3x + 3$ 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 A , 与函数 $y = x$ 的图象交于点 P .



(1) 在该坐标系中画出函数 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 的图象, 并说明点 P 也在函数 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 的图象上;

(2) 设直线 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 与 x 轴交于点 C , 与 y 轴交于点 D , 求证: PO 平分 $\angle APC$;

(3) 连接 AC , 求 $\triangle APC$ 的面积;

(4) 已知 $AC = 3\sqrt{2}$, 在 y 轴上, 是否存在点 M , 使 $\triangle ACM$ 为等腰三角形? 若存在, 请直接写出符合条件的所有点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

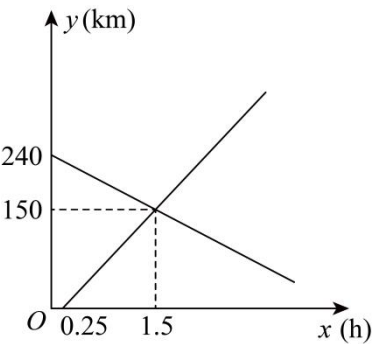
压轴十三、一次函数的综合应用

61. 为了提高同学们的运算能力, 激发学习数学的兴趣, 某中学开展了主题为“运算能力争霸赛”的数学活动, 并计划购买 A 、 B 两种奖品奖励在数学活动中表现突出的学生. 已知 A 奖品的单价是 10 元; B 奖品的单价是 25 元. 学校计划购买 A 、 B 两种奖品共 100 件, 购买费用不超过 1385 元, 且 A 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 4 倍.

(1) 该学校有几种购买方案?

(2) 设购买 A 、 B 两种奖品的总费用为 W 元, 请写出 W (元) 与 A 种奖品的数量 (件) 之间的函数关系, 并求出哪一种购买方案可以使得总费用 W 最少, 并求出 W 的最小值.

62. A, B 两地在一条笔直的公路上，一辆货车从 A 地出发匀速驶向 B 地， 0.25h 后一辆小轿车从 B 地出发匀速驶向 A 地，如图是它们离 B 地的路程 $y(\text{km})$ 与货车行驶时间 $x(\text{h})$ 之间的函数图像.



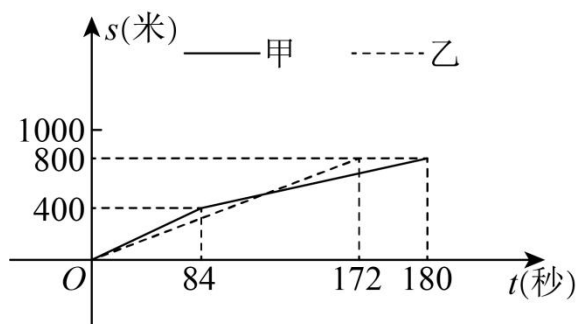
(1)求货车离 B 地的路程 $y_1(\text{km})$ 与它行驶的时间 $x(\text{h})$ 之间的函数表达式;

(2)求两车之间相距不超过 54km 时，货车行驶时间 x 的取值范围.

63. 根据如表所示素材，探索完成任务.

深圳华强北电子配件采购方案				
素材一	为备战双十一购物节，深圳华强北某电子商户分两次购进 A、B 两种充电器，两次同型号进价相同：			
	采购批次	A 数量（件）	B 数量（件）	采购总费用（元）
	第一次	30	40	3800
	第二次	40	30	3200
素材二	售价 A：30 元/件，B：100 元/件.			
素材三	计划共购进 1000 件充电器，且 A 数量不少于 B 数量的 4 倍.			
问题解决				
任务一	求 A、B 充电器每件进价.			
任务二	求获利最大的进货方案及最大利润.			

64. 甲、乙两同学在 400 米的环形跑道上参加 1000 米跑步训练，时间少于或等于 3 分 40 秒为满分．前 800 米的路程 s （米）和时间 t （秒）的函数关系如图．



- (1) 乙同学按照当前的速度继续匀速跑，那么他能否得到满分？请说明理由．
- (2) 求甲同学跑第 2 圈时的路程 s （米）关于时间 t （秒）的函数解析式．
- (3) 若最后 200 米甲同学按第 1 圈的速度冲刺，乙同学保持原速不变，当乙同学跑到终点时，甲同学离终点还有多远？

65. 某校综合与实践小组的同学开展了主题为探究最大心率与年龄的关系项目化学习，他们通过某医学杂志收集到在一定年龄范围内的最大心率（最大心率指人体在进行运动时心脏每分钟跳动的最大次数）数据如下：

年龄 x / 周岁	12	17	22	27	32	37	42	47
最大心率 y （次 / 分）	208	203	198	193	188	183	178	173

- (1) 根据表中的信息，可以推断最大心率 y （次 / 分）是年龄 x （周岁）的_____函数关系（填“一次”“二次”或“反比例”）；求 y 关于 x 的函数表达式．

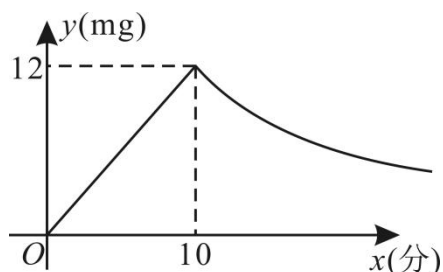
(2) 已知不同运动效果时的心率如下：

运动效果	运动心率占最大心率的百分比
燃烧脂肪	60% ~ 70%
提升耐力	70% ~ 80%

20 周岁的小李想要达到提升耐力的效果，他的运动心率应该控制在_____次 / 分至_____次 / 分；小美想要达到燃烧脂肪的效果，她的运动心率应该控制在 114 次 / 分至 133 次 / 分，小美的年龄是_____周岁．

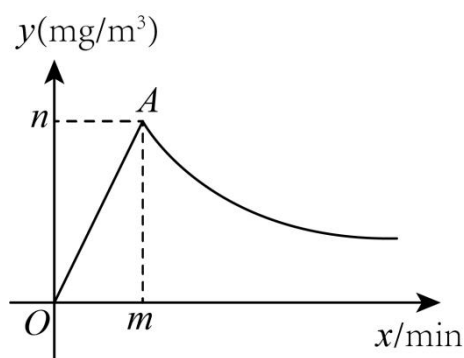
压轴十四、一次函数与反比例函数综合应用

66. 为预防“手足口病”，某班对教室进行“药熏消毒”. 已知药物燃烧阶段，室内每立方米空气中的含药量 y (mg) 与燃烧时间 x (分钟) 成正比例；燃烧后， y 与 x 成反比例 (如图所示). 现测得药物 10 分钟燃完，此时教室内每立方米空气含药量为 12mg. 据以上信息解答下列问题：



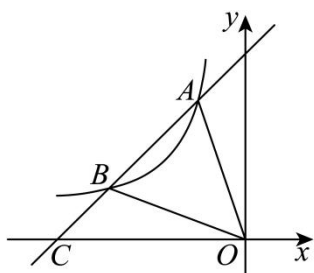
- (1) 求药物燃烧时 y 与 x 的函数关系式；
- (2) 求药物燃烧后 y 与 x 的函数关系式；
- (3) 当每立方米空气中含药量不低于 5mg 时，对病毒有作用，求对病毒有作用的时间有多长？

67. 为了做好校园疫情防控工作，校医每天早上对全校办公室和教室进行药物熏蒸消毒. 消毒药物在一间教室内空气中的浓度 y (单位: mg/m^3) 与时间 x (单位: min) 的函数关系如图所示: 校医进行药物熏蒸时 y 与 x 的函数关系式为 $y=2x$, 药物熏蒸完成后 y 与 x 成反比例函数关系, 两个函数图象的交点为 $A(3,n)$.



- (1) 求 n 的值；
- (2) 当 $x \geq 3$ 时，求 y 与 x 的函数关系式；
- (3) 当教室空气中的药物浓度不低于 $2\text{mg}/\text{m}^3$ 时，对杀灭病毒有效. 问：本次消毒中有效杀灭病毒的时间持续多长时间？

68. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}(x<0)$ 的图象相交于点 A 、点 B ，与 x 轴交于点 C ，其中点 $A(-1,3)$ 和点 $B(-3,n)$ 。



- (1) 填空： $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 求一次函数的解析式和 $\triangle AOB$ 的面积；
- (3) 根据图象回答：当 x 为何值时， $kx+b-\frac{m}{x} < 0$ （请直接写出答案） $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

69. 学习数学，也要善用现代工具。用绘图软件绘制过 $(20,3)$ 的双曲线与动直线： $y=a$ ，且交于一点，图 1 为 $a=8$ 时的视窗情形。

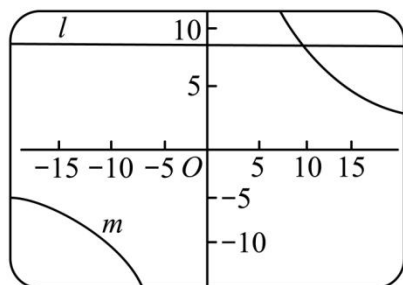


图1

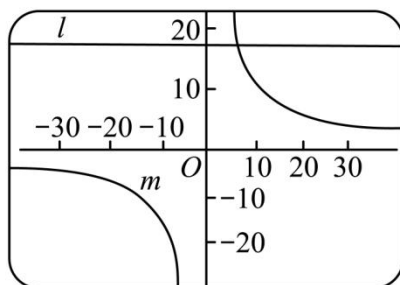


图2

- (1) 当 $a=15$ 时，求：动直线与双曲线的交点坐标；
- (2) 视窗的大小不变，但其可视范围可以变化，且变化前后原点始终在视窗中心。例如，为在视窗中看到 (1) 中的交点，可将图 1 中坐标系的单位长度变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，其可视范围就由 $-15 \leq x \leq 15$ 及 $-10 \leq y \leq 10$ 变成了 $-30 \leq x \leq 30$ 及 $-20 \leq y \leq 20$ （如图 2）。当 $a=-1.2$ 和 $a=-1.5$ 时，动直线与双曲线的交点分别是点 A 和 B ，为能看到双曲线在 A 和 B 之间的一整段图象，需要将图 1 中坐标系的单位长度至少变为原来的 $\frac{1}{k}$ ，求： k 的取值范围。

70. 探索一个问题：“任意给定一个矩形 A ，是否存在另一个矩形 B ，它的周长和面积分别是已知矩形周长和面积的一半？”

(1)完成下列空格：

当已知矩形 A 的边长分别为 6 和 1 时，小明是这样研究的：设所求矩形的一边是 x ，则另一边为 $\left(\frac{7}{2}-x\right)$ ，

由题意得方程： $x\left(\frac{7}{2}-x\right)=3$ ，化简得： $2x^2-7x+6=0$ 。

$$\because b^2-4ac=49-48>0, \therefore x_1=\underline{\hspace{2cm}}, x_2=\underline{\hspace{2cm}}.$$

$\therefore$ 满足要求的矩形 B 存在。

小红的做法是：设所求矩形的两边分别是 x 和 y ，由题意得方程组： $\begin{cases} x+y=\frac{7}{2} \\ xy=3 \end{cases}$ 消去 y 化简后也得到：

$$2x^2-7x+6=0, \text{ (以下同小明的做法)}$$

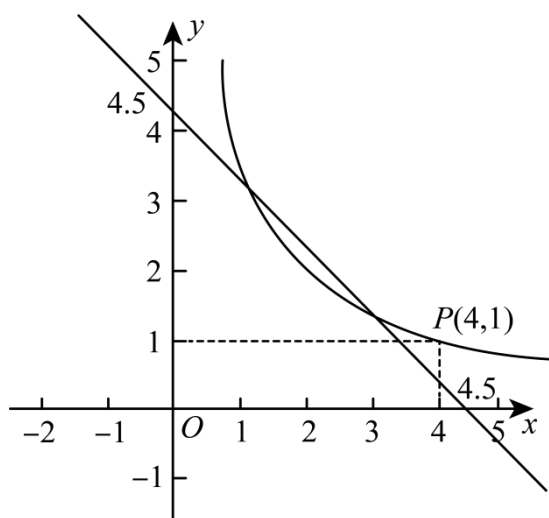
(2)如果已知矩形 A 的边长分别为 2 和 1，请你仿照小明或小红的方法研究是否存在满足要求的矩形 B 。

(3)在小红的做法中，我们可以把方程组整理为： $\begin{cases} y=\frac{7}{2}-x \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$ ，此时两个方程都可以看成是函数解析式，从而

我们可以利用函数图象解决一些问题。如图，在同一平面直角坐标系中画出了一次函数和反比例函数的部分图象，其中 x 和 y 分别表示矩形 B 的两边长，请你结合刚才的研究，回答下列问题：（完成下列空格）

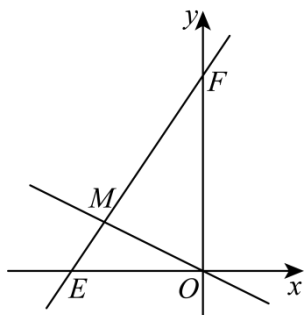
①这个图象所研究的矩形 A 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；周长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

②满足条件的矩形 B 的两边长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



压轴十五、一次函数几何综合应用

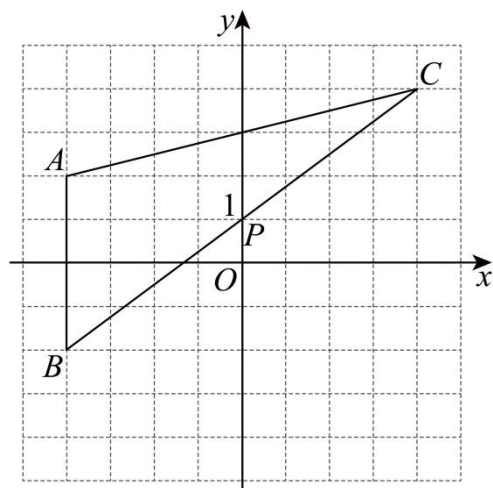
71. 如图，一次函数 $y = mx + 2m + 3$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 E 、点 F ，与 $y = -\frac{1}{2}x$ 的图象交于点 M ，且点 M 的横坐标为 -3 。



(1) 求 m 的值与 EF 的长；

(2) 若点 Q 为 x 轴上一点，且 $S_{\triangle EMQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle EFO}$ ，求点 Q 的坐标。

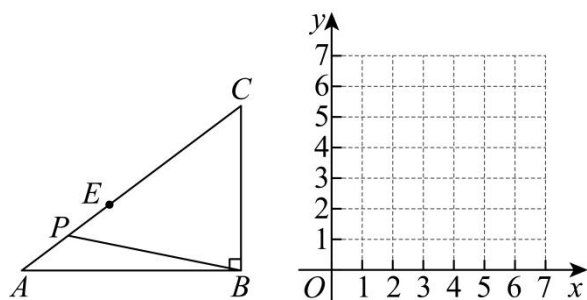
72. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(-4, 2)$ ， $B(-4, -2)$ ， $C(4, 4)$ 。 BC 与 y 轴交于点 $P(0, 1)$ 。



(1) 在图中画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A'B'C'$ ，并写出点 A', B', C' 的坐标（点 A, B, C 的对应点分别是点 A', B', C' ）；

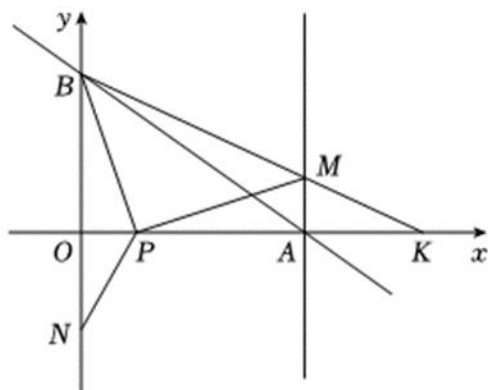
(2) 在平面直角坐标系中，若点 $M_1(x_1, y_1)$ ， $M_2(x_2, y_2)$ ，那么点 $M_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ 是线段 M_1M_2 的中点。判断点 P （填“是”或“不是”） BC 的中点，写出 AC 中点 Q 的坐标及（1）题中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 重叠部分的面积。

73. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, E 为 AC 上一点, $CE = 3$, 动点 P 从点 E 出发, 沿折线 $E \rightarrow A \rightarrow B$ 方向运动, 到达点 B 时停止运动, 连接 PB , PC . 设点 P 走过的路程为 x , $\triangle PBC$ 的面积为 y .



- (1) 请直接写出 y 关于 x 的函数表达式, 并注明自变量 x 的取值范围;
- (2) 在给定的平面直角坐标系中, 画出这个函数的图象, 并写出该函数的一条性质;
- (3) 一次函数 $y_1 = \frac{1}{2}x + k$ 的图象与 y 的图象有且仅有 2 个交点, 请直接写出常数 k 的取值范围.

74. 如图, 坐标系 xOy 中, 直线 $y = ax + b$ 与 x 轴正半轴交于点 A , 与 y 轴正半轴交于点 B , 且 $OA = 4$, $AB = 5$.



【基本问题】

- (1) 求直线 AB 的解析式;

【问题探究】

- (2) 点 $P(t, 0)$ 是线段 OA 上一点, 连接 BP , 当 $\triangle ABP$ 的面积为 4.5 时, 求 t 的值;

【问题拓展】

- (3) 在 (2) 的条件下, 过点 A 作直线 $m \parallel y$ 轴, 在直线 m 上有一点 M , 直线 BM 交 x 轴正半轴于点 K , 在射线 BO 上有一点 N , 使 $\triangle BPN \cong \triangle PMK$, 请直接写出点 N 坐标.

75. 【模型建立】

美国总统伽菲尔德利用图1验证了勾股定理，过等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的直角顶点 C 作直线 l ，再过点 A 作 $AG \perp l$ 于点 G ，过点 B 作 $BH \perp l$ 于点 H ，易证得： $\triangle AGC \cong \triangle CHB$ 。我们称这种全等模型为“K 型全等”（无需证明）。

【模型应用】

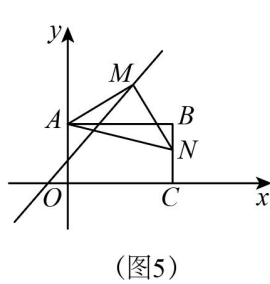
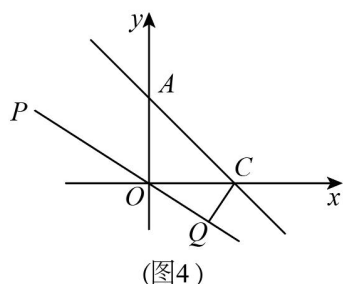
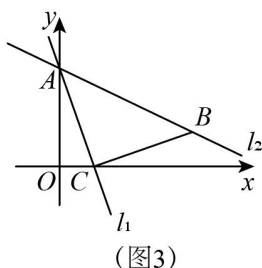
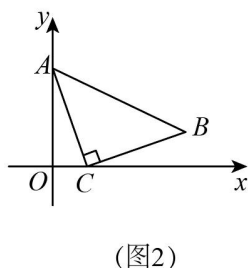
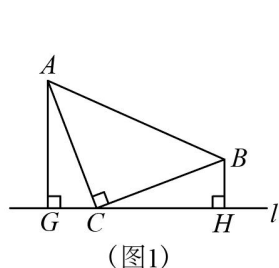
(1) 如图2，在平面直角坐标系中，等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 A 的坐标为 $(0, 6)$ ，点 C 的坐标为 $(2, 0)$ ，则点 B 的坐标为_____；

(2) 如图3，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = -3x + 6$ 分别交 x 轴， y 轴于点 C 、点 A ，将直线 AC 绕点 A 逆时针旋转 45° 得到直线 l_2 ，则直线 l_2 的函数表达式为_____；

(3) 如图4，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -x + 2$ 的图像分别交 x 轴， y 轴于点 C 、点 A ，点 P ， Q 是正比例函数 $y = kx$ ($k < 0$) 图像上两点，若 $CQ \perp PQ$ ， $CQ = 1$ ，则点 A 到直线 PQ 的距离为_____；

【模型拓展】

(4) 如图5，在平面直角坐标系中，点 B 的坐标为 $(5, 2)$ ，过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 C ，作 $BA \perp y$ 轴于点 A ，点 N 是线段 BC 上一点，点 M 在直线 $y = x + 1$ 上。当点 A ， M ， N 构成等腰直角三角形时，直接写出点 M 的横坐标_____。

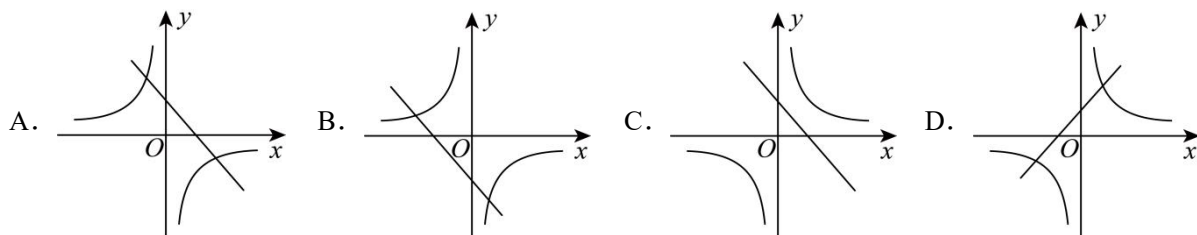


模拟练习卷

1. 已知 x, y, z 均为整数且满足 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 214 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 = -19 \end{cases}$, 则该方程组的解有 ()

A. 2 组 B. 4 组 C. 8 组 D. 16 组

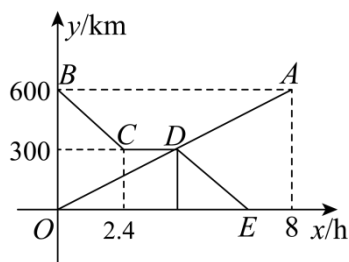
2. 函数 $y = kx - k$ 与函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一直角坐标系中的大致图象可能是 ()



3. A, B 两地相距 240km, 如果平均车速提高了 50%, 则从 A 地到 B 地的时间缩短了 1h, 设原来的平均车速为 x km/h, 则根据题意可列方程为 ()

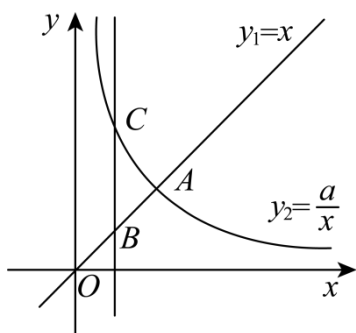
A. $\frac{240}{x} - \frac{240}{(1-50\%)x} = 1$ B. $\frac{240}{(1+50\%)x} - \frac{240}{x} = 1$
 C. $\frac{240}{x} - \frac{240}{(1+50\%)x} = 1$ D. $\frac{240}{(1-50\%)x} - \frac{240}{x} = 1$

4. 如图, 货车和轿车分别从甲、乙两地同时出发, 沿同一公路相向而行. 轿车出发 2.4h 后休息, 直至与货车相遇后, 以原速度继续行驶, 设两车出发时间为 x (单位: h), 货车、轿车与甲地的距离分别为 y_1 (单位: km)、 y_2 (单位: km), 图中的线段 OA 、折线 $BCDE$ 分别表示 y_1 、 y_2 与 x 之间的函数关系. 有下列四个结论: ①轿车行驶的速度为 125 km/h; ②货车行驶的速度为 65 km/h; ③线段 DE 所在直线的函数表达式为 $y = -125x + 800$; ④两车出发 2 小时或 4 小时后相距 150 km. 其中正确的结论是 ()

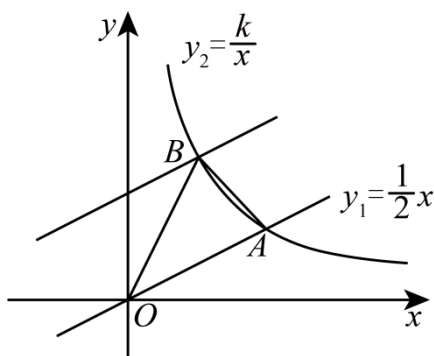


A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ③④

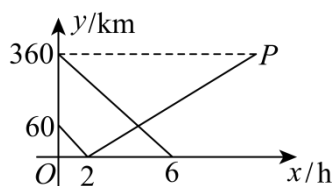
5. 如图, 函数 $y_1 = x (x \geq 0)$ 与 $y_2 = \frac{9}{x} (x > 0)$ 的图象相交于点 A, 直线 $x = 2$ 与 y_1 和 y_2 分别交于点 B, C, 下列说法中错误的是 ()



- A. 两函数图象的交点 A 的坐标为 (3,3)
- B. 当 $x > 3$ 时, $y_1 < y_2$
- C. 当 $x = 2$ 时, $BC = \frac{5}{2}$
- D. 当 x 逐渐增大时, y_1 随着 x 的增大而增大, y_2 随着 x 的增大而减小
6. 若关于 x 的分式方程 $\frac{3x-m}{x+1} = 2$ 的解为负数, 则 m 的取值范围为_____.
7. 已知 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x+y=m \\ x \cdot y=n \end{cases}$ 的一个解, 那么这个方程组的另一个解是_____.
8. 每年中秋节, 某商家生产的甲、乙、丙三种月饼礼盒一直深受消费者喜爱. 今年中秋节, 该商家继续售卖甲、乙、丙三种月饼礼盒, 已知去年该商家售卖甲、乙、丙三种月饼礼盒的营业额之比为 4:9:7. 今年, 由于商家加大了促销宣传力度, 预计三种月饼礼盒的营业额都会增加, 其中甲种礼盒增加的营业额占总增加的营业额的 $\frac{8}{15}$, 此时, 甲种月饼礼盒的营业额与今年三种月饼礼盒总营业额之比为 4:15, 为使今年乙、丙两种月饼礼盒的营业额之比为 6:5, 则今年乙种月饼礼盒增加的营业额与今年总营业额之比为_____.
9. 如图, 正比例函数 $y = \frac{1}{2}x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于点 $A(m, 2)$, 若把直线 $y = \frac{1}{2}x$ 向上平移 3 个单位长度与 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于点 B, 连接 AB、OB, 则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.



10. 在 A, B 两地之间有汽车站 C 站, 客车由 A 地驶往 C 站, 货车由 B 地驶往 A 地. 两车同时出发, 匀速行驶. 客车、货车离 C 站的路程 y_1, y_2 (km) 与行驶时间 x (h) 之间的函数图象如图所示. 有下列说法: ① A, B 两地相距为 420 km; ② 两小时后, 货车离 C 站的路程 y_2 与行驶时间 x 之间的函数关系式为 $y_2 = 30x - 60$; ③ 客车离 C 站的路程 y_1 与行驶时间 x 之间的函数关系式为: $y_1 = -60x + 360$; ④ 客、货两车在 $\frac{14}{3}$ 小时相遇. 其中正确的有 _____ (填序号.)



11. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \end{cases}$$

12. 新定义: 如果两个实数 a, b 使得关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + 1 = b$ 的解是 $x = \frac{1}{a+b}$ 成立, 那么我们就把实数 a, b 组成的数对 $[a, b]$ 称为关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + 1 = b$ 的一个“关联数对”.

例如: $a = 2, b = -5$ 使得关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x} + 1 = -5$ 的解是 $x = \frac{1}{2+(-5)} = -\frac{1}{3}$ 成立, 所以数对 $[2, -5]$ 就是关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + 1 = b$ 的一个“关联数对”.

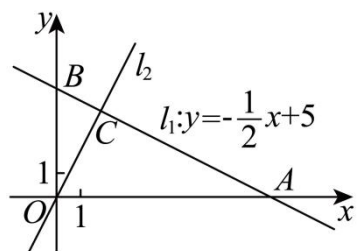
(1) 判断下列数对是否为关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + 1 = b$ 的“关联数对”,

① $[3, -5]$ (____); ② $[1, 2]$ (____). 若是, 请在括号内打“√”若不是, 打“×”.

(2) 若数对 $[n, -\frac{5}{3} - n]$ 是关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + 1 = b$ 的“关联数对”, 求 n 的值.

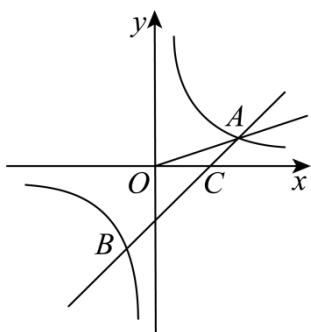
(3) 若数对 $[m+k, -k]$ ($m \neq -1$, 且 $m \neq 0, k \neq 1$) 是关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + 1 = b$ 的“关联数对”, 且关于 x 的方程 $kx - m + 1 = \frac{-2m}{m+1}x$ 有整数解, 求整数 m 的值.

13. 如图，直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 的图象 l_1 分别与 x ， y 轴交于 A ， B 两点，正比例函数的图象 l_2 与 l_1 交于点 $C(m, 4)$ 。



- (1) 求 m 的值及 l_2 的解析式；
- (2) 求 $S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC}$ 的值；
- (3) 若点 P 为直线 l_1 上不与点 A 、 B 重合的一个动点。当 $\triangle BOP$ 的面积是 5 时，求点 P 的坐标；

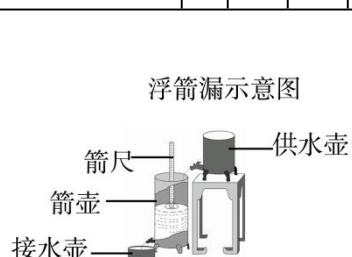
14. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $AB: y = x - 4$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于 A 、 B 两点，与 x 轴相交于点 C ，已知点 A ， B 的坐标分别为 $(6n, 2n)$ 和 $(m, -6)$ 。



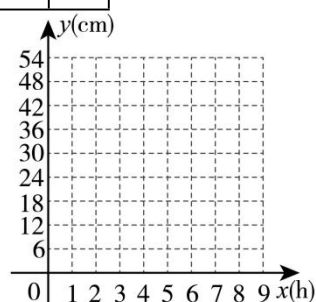
- (1) 求反比例函数的解析式；
- (2) 直接写出不等式 $x - 4 \geq \frac{k}{x}$ 的解集；
- (3) 连接 OB ，求 $\triangle AOB$ 的面积。

15. 《九章算术》中记载，浮箭漏（如图①）出现于汉武帝时期，它由供水壶和箭壶组成，箭壶内装有箭尺，水匀速地从供水壶流到箭壶，箭壶中的水位逐渐上升，箭尺匀速上浮，可通过读取箭尺读数计算时间，某学校数学兴趣小组仿制了一套浮箭漏，并从函数角度进行了如下实验探究，兴趣小组每 2h 记录一次箭尺读数（箭尺最大读数为120cm），得到如下表：

供水时间 x (h)	0	2	4	6	8
箭尺读数 y (cm)	6	18	30	42	54



图①



图②

- (1)如图②，建立平面直角坐标系，横轴表示供水时间 $x(\text{h})$ ，纵轴表示箭尺读数 $y(\text{cm})$ ，请描出以表格中数据为坐标的各点，并连线；
- (2)观察搞出各点的分布规律，可以知道它是我们学过的什么函数，请结合表格数据，求出该函数的解析式；
- (3)应用上述得到的规律计算：如果本次实验记录的开始时间是上午 9:00，那么当箭尺读数为 78cm 时是几点？