

模型介绍

在坐标系中确定点,使得由该点及其他点构成的三角形与其他三角形相似,即为“相似三角形存在性问题”.

【相似判定】

判定1: 三边对应成比例的两个三角形是相似三角形;

判定2: 两边对应成比例且夹角相等的两个三角形是相似三角形;

判定3: 有两组角对应相等的三角形是相似三角形.

以上也是坐标系中相似三角形存在性问题的方法来源,根据题目给的已知条件选择恰当的判定方法,解决问题.

【题型分析】

通常相似的两三角形有一个是已知的,而另一三角形中有1或2个动点,即可分为“单动点”类、“双动点”两类问题.

【思路总结】

根据相似三角形的做题经验,可以发现,判定1基本是不会用的,这里也一样不怎么用,对比判定2、3可以发现,都有角相等!

所以,要证相似的两个三角形必然有相等角,关键点也是先找到一组相等角.

然后再找:

思路1: 两相等角的两边对应成比例;

思路2: 还存在另一组角相等.

事实上,坐标系中在已知点的情况下,线段长度比角的大小更容易表示,因此选择方法可优先考虑思路1.

一、如何得到相等角?

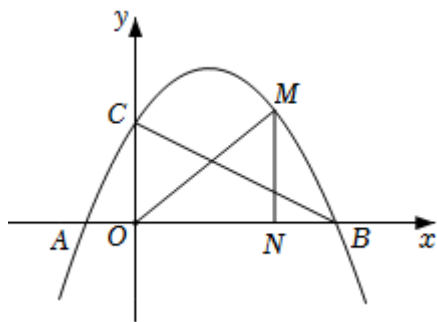
二、如何构造两边成比例或者得到第二组角?

搞定这两个问题就可以了.



例题精讲

【例 1】. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 交 x 轴于点 A, B , 交 y 轴于点 C , 点 M 是第一象限内抛物线上一点, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N . 若 $\triangle MON$ 与 $\triangle BOC$ 相似, 求点 M 的横坐标.

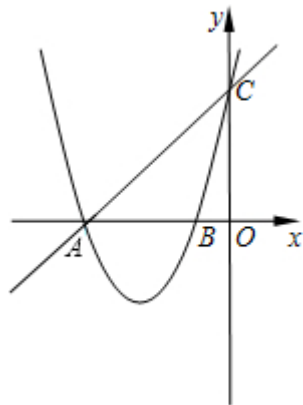


►变式训练

【变 1-1】. 如图, 在平面直角坐标系内, 已知直线 $y = x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 和点 C , 抛物线 $y = x^2 + kx + k - 1$ 图象过点 A 和点 C , 抛物线与 x 轴的另一交点是 B ,

(1) 求出此抛物线的解析式、对称轴以及 B 点坐标;

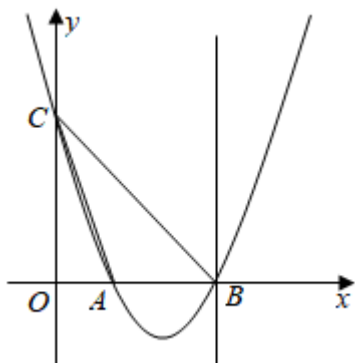
(2) 若在 y 轴负半轴上存在点 D , 能使得以 A, C, D 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 请求出点 D 的坐标.



【例 2】. 如图, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(1, 0), B$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$.

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 过点 B 作 x 轴的垂线, 在该垂线上取一点 P , 使得 $\triangle PBC$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 请求出点 P 的坐标.



►变式训练

【变 2-1】如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 且过点 $D(2, -3)$. 点 P 、 Q 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的动点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当点 P 在直线 OD 下方时, 求 $\triangle POD$ 面积的最大值.

(3) 直线 OQ 与线段 BC 相交于点 E , 当 $\triangle OBE$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, 求点 Q 的坐标.

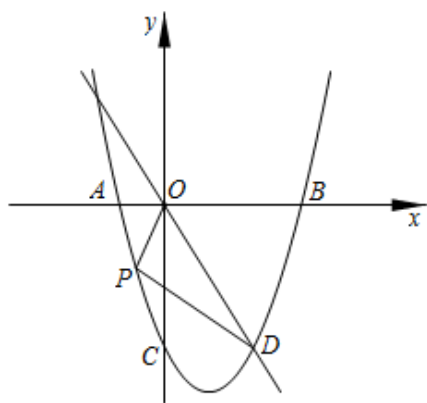


图1

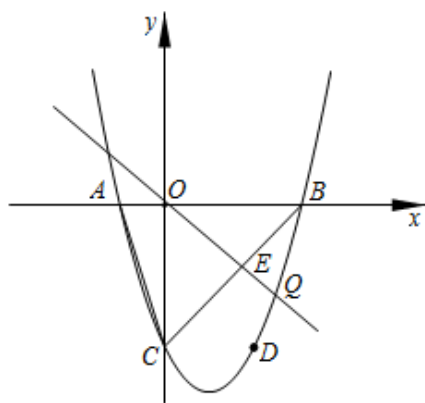


图2

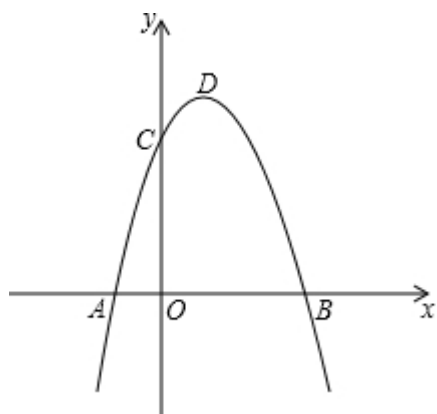




实战演练

1. 抛物线 $y = -x^2$ 平移后的位置如图所示，点 A, B 坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ ，设平移后的抛物线与 y 轴交于点 C ，其顶点为 D 。

- (1) 求平移后的抛物线的解析式和点 D 的坐标；
- (2) $\angle ACB$ 和 $\angle ABD$ 是否相等？请证明你的结论；
- (3) 点 P 在平移后的抛物线的对称轴上，且 $\triangle CDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求点 P 的坐标。

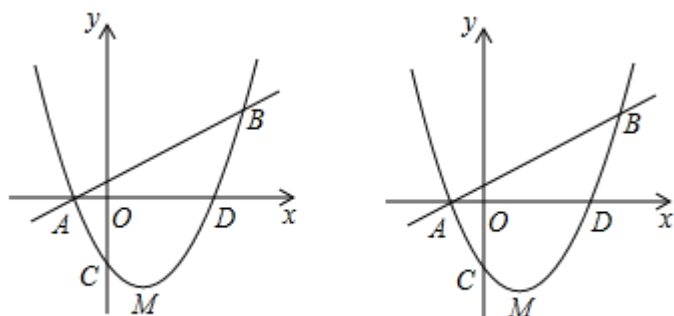


2. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以 AB 所在直线为 x 轴，过 C 点的直线为 y 轴建立平面直角坐标系。此时， A 点坐标为 $(-1, 0)$ ， B 点坐标为 $(4, 0)$ 。

- (1) 试求点 C 的坐标；
- (2) 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 $\triangle ABC$ 的三个顶点，求抛物线的解析式；

(1) 求抛物线的解析式;

(3) 若点 Q 为 x 轴上一动点, 点 N 在抛物线上且位于其对称轴右侧, 当 $\triangle QMN$ 与 $\triangle MAD$ 相似时, 求 N 点的坐标.



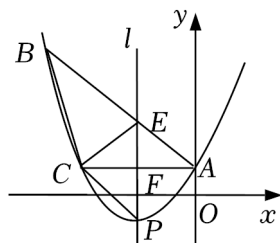
备用图

(1) 直接写出: $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 过点 P 且与 y 轴平行的直线 l 与直线 AB , AC 分别交于点 E , F , 当四边形 $AECF$ 的面积最大时,

求点 P 的坐标；

(3) 当点 P 为抛物线的顶点时，在直线 AC 上是否存在点 Q ，使得以 C, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，若存在，直接写出点 Q 的坐标，若不存在，请说明理由。



5. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(0, -4)$ ，与 x 轴交于另一点 C ，连接 BC 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图， P 是第一象限内抛物线上一点，且 $S_{\triangle PBO} = S_{\triangle PBC}$ ，求直线 AP 的表达式；

(3) 在抛物线上是否存在点 D ，直线 BD 交 x 轴于点 E ，使 $\triangle ABE$ 与以 A, B, C, E 中的三点为顶点的三角形相似（不重合）？若存在，请直接写出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由。

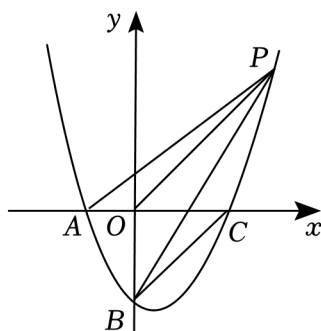


图1

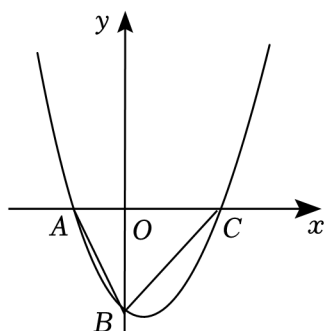


图2

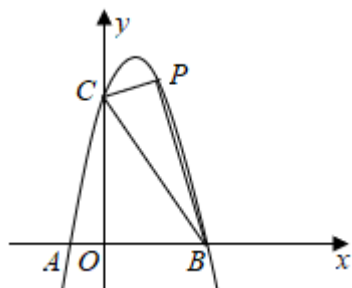
6. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ 经过两点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ ， C 是抛物线与 y 轴的交点。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 $P(m, n)$ 在平面直角坐标系第一象限内的抛物线上运动，直线 CP 与 x 轴交于点 Q ，当 $\angle BQC = \angle BCO$ 时，求此时 P 点坐标；

(3) 点 M 在抛物线上运动，点 N 在 y 轴上运动，是否存在点 M 、点 N 使得 $\angle CNM = 90^\circ$ ，且 $\triangle CMN$

与 $\triangle OBC$ 相似, 如果存在, 请求出点 M 和点 N 的坐标.



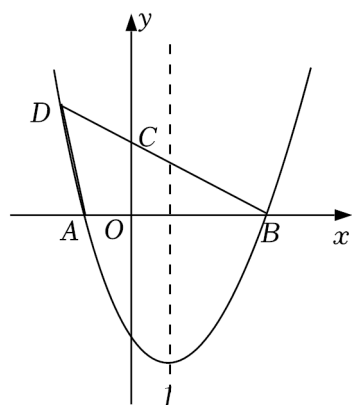
7. 如图, 抛物线 $y = \frac{3+\sqrt{3}}{6}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 A, B 分别位于原点的左、右两侧, $BO = 3AO = 3$, 过点 B 的直线与 y 轴正半轴和抛物线的交点分别为点 C, D , $BC = \sqrt{3}CD$.

(1) 求 b, c 的值;

(2) 求直线 CD 的函数解析式;

(3) 求 $\angle ADB$ 的度数;

(4) 点 P 在抛物线的对称轴上且在 x 轴下方, 点 Q 在射线 BA 上, 当 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BPQ$ 相似时, 请直接写出所有满足条件的点 Q 的坐标.



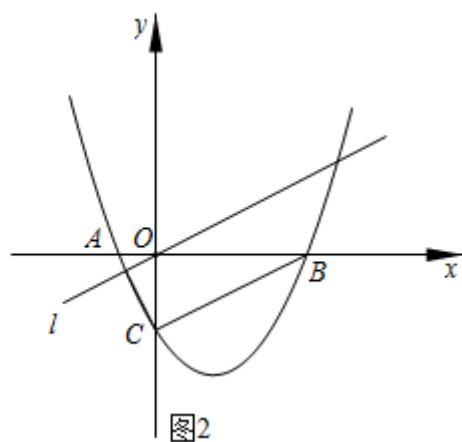
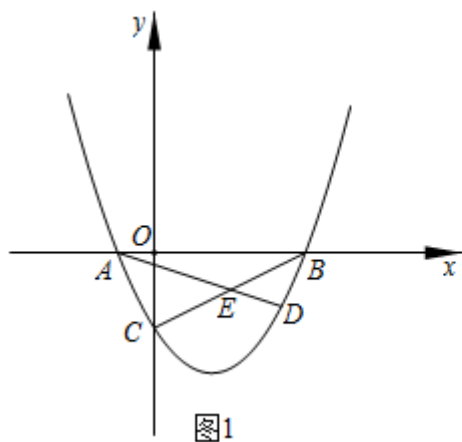
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0), B(4, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, -2)$.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 如图 1, 点 D 为第四象限抛物线上一点, 连接 AD, BC 交于点 E , 求 $\frac{DE}{AE}$ 的最大值;

(3) 如图 2, 连接 AC, BC , 过点 O 作直线 $l \parallel BC$, 点 P, Q 分别为直线 l 和抛物线上的点, 试探究:

在第一象限是否存在这样的点 P, Q ，使 $\triangle PQB \sim \triangle CAB$ ？若存在，请求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

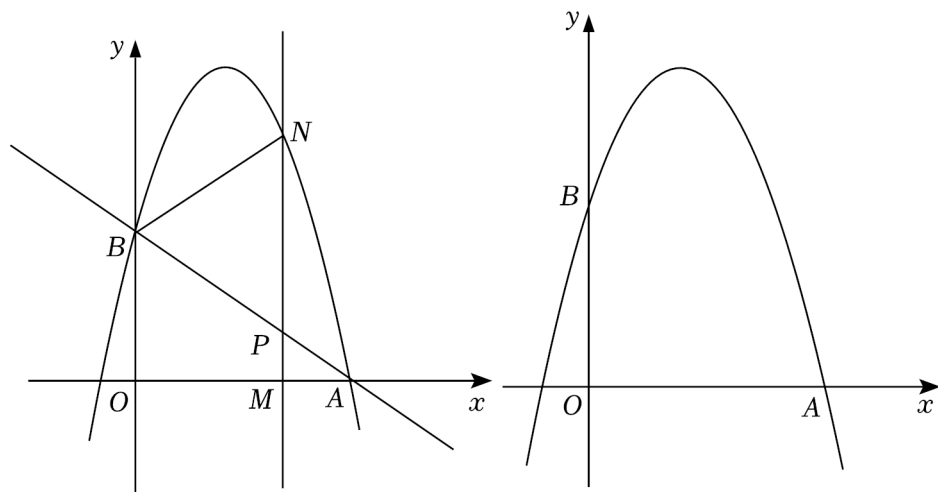


9. 如图，直线 $y = -\frac{2}{3}x + c$ 与 x 轴交于点 $A(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 A, B 。

(1) 求点 B 的坐标和抛物线的解析式；

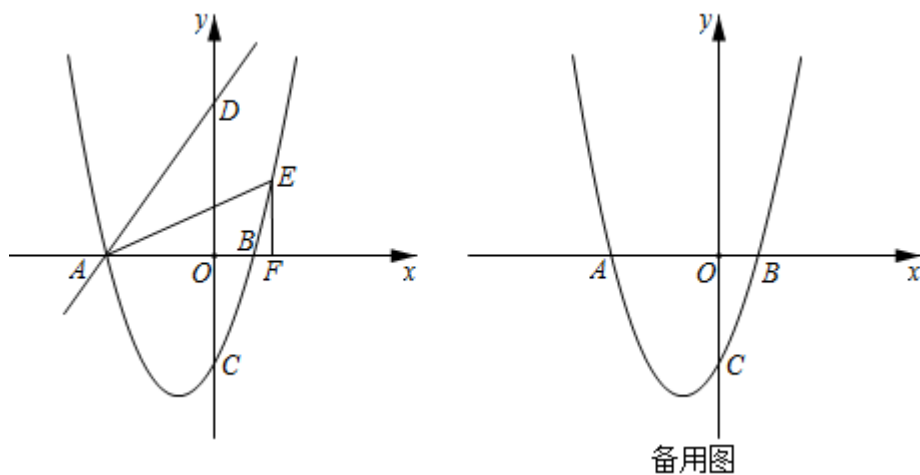
(2) M 为线段 OA 上一动点，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P, N 。若以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似，求点 M 的坐标；

(3) 将抛物线在 $0 \leq x \leq 3$ 之间的部分记为图象 L ，将图象 L 在直线 $y=t$ 上方部分沿直线 $y=t$ 翻折，其余部分保持不动，得到一个新的函数图象，记这个函数的最大值为 a ，最小值为 b ，若 $a - b \leq 3$ ，请直接写出 t 的取值范围。



备用图

10. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴相交于点 C ， B 、 C 两点的坐标分别为 $(1, 0)$ 、 $(0, -3)$ ，直线 $y=kx+3k$ 经过点 A ，与 y 轴交于点 D 。



(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 点 E 是抛物线上一动点 (不与点 C 重合), 连接 AE , 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴, 垂足为 F , 若 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形, 求点 E 的坐标;

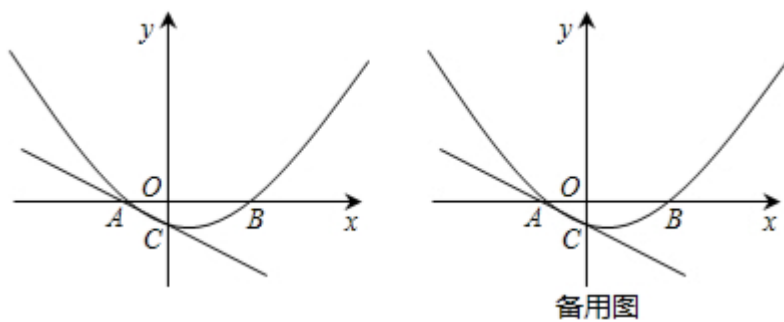
(3) 在 (2) 的条件下, 若在直线 $y=kx+3k$ 上存在一点 G 使得 $\triangle DFG$ 与 $\triangle AOC$ 相似, 求出 k 的值.

11. 如图, 已知 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, 抛物线 $y=ax^2+bx-1$ 过 A 、 B 两点, 并与过 A 点的直线 $y=-\frac{1}{2}x-1$ 交于点 C .

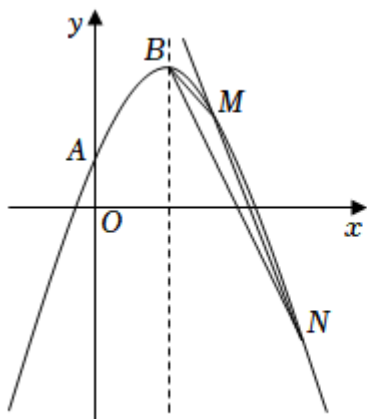
(1) 求抛物线解析式及对称轴;

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P ，使四边形 $ACPO$ 的周长最小？若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由；

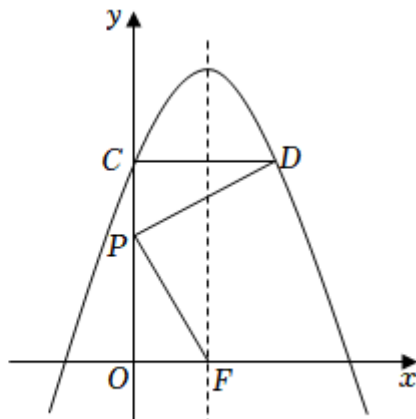
(3) 点 M 为 y 轴右侧抛物线上一点，过点 M 作直线 AC 的垂线，垂足为 N 。问：是否存在这样的点 N ，使以点 M 、 N 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似，若存在，求出点 N 的坐标，若不存在，请说明理由。



12. 抛物线 $L: y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ ，与它的对称轴直线 $x=1$ 交于点 B 。



图①



图②

(1) 求出抛物线 L 的解析式；

(2) 如图 1，过定点的直线 $y=kx - k+4$ ($k<0$) 与抛物线 L 交于点 M 、 N 。若 $\triangle BMN$ 的面积等于 1，求 k 的值；

(3) 如图 2，将抛物线 L 向上平移 m ($m>0$) 个单位长度得到抛物线 L_1 ，抛物线 L_1 与 y 轴交于点 C ，过点 C 作 y 轴的垂线交抛物线 L_1 于另一点 D ， F 为抛物线 L_1 的对称轴与 x 轴的交点， P 为线段 OC 上一点，若 $\triangle PCD$ 与 $\triangle POF$ 相似，并且符合条件的点 P 恰有 2 个，求 m 的值及相应点 P 的坐标。

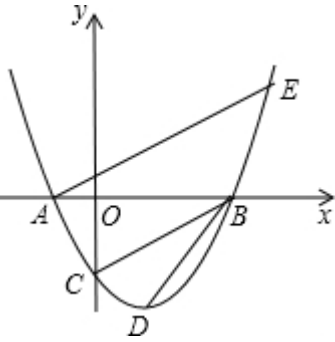
13. 设抛物线 $y=ax^2+bx-2$ 与 x 轴交于两个不同的点 $A(-1, 0)$ 、 $B(m, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，且 $\angle ACB$

=90 度.

(1) 求 m 的值和抛物线的解析式;

(2) 已知点 $D(1, n)$ 在抛物线上, 过点 A 的直线 $y=x+1$ 交抛物线于另一点 E . 若点 P 在 x 轴上, 以点 P 、 B 、 D 为顶点的三角形与 $\triangle AEB$ 相似, 求点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, $\triangle BDP$ 的外接圆半径等于_____.



14. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{7\sqrt{3}}{8}$ 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 右侧),

点 D 为抛物线的顶点, 点 C 在 y 轴的正半轴上, CD 交 x 轴于点 F , $\triangle CAD$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle CFE$, 点 A 恰好旋转到点 F , 连接 BE .

(1) 求点 A 、 B 、 D 的坐标;

(2) 求证: 四边形 $BFCE$ 是平行四边形;

(3) 如图 2, 过顶点 D 作 $DD_1 \perp x$ 轴于点 D_1 , 点 P 是抛物线上一动点, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴, 点 M 为垂足, 使得 $\triangle PAM$ 与 $\triangle DD_1A$ 相似 (不含全等).

① 求出一个满足以上条件的点 P 的横坐标;

② 直接回答这样的点 P 共有几个?

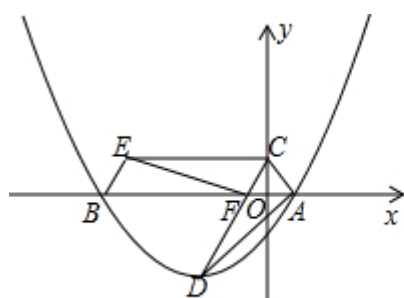


图1

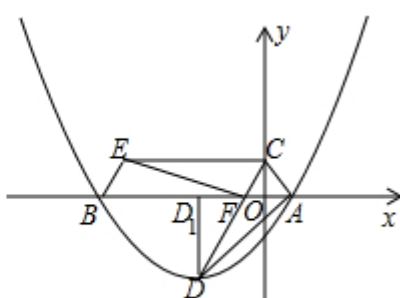


图2

15. 如图 1, 经过原点 O 的抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于另一点 $A(\frac{3}{2}, 0)$, 在第一象限内与直线 $y = x$ 交于点 $B(2, t)$.

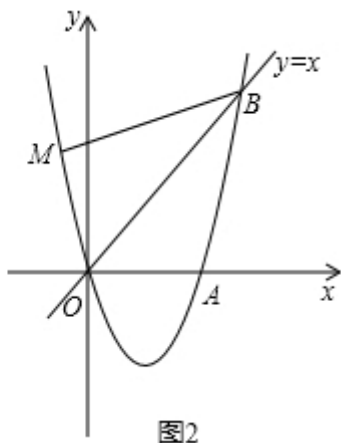
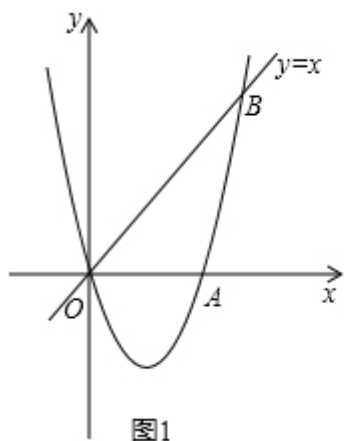
(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 在第四象限内的抛物线上有一点 C , 满足以 B, O, C 为顶点的三角形的面积为 2, 求点 C 的坐标;

(3) 如图 2, 若点 M 在这条抛物线上, 且 $\angle MBO = \angle ABO$,

①求点 M 的坐标;

②在 (2) 的条件下, 是否存在点 P , 使得 $\triangle POC \sim \triangle MOB$? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

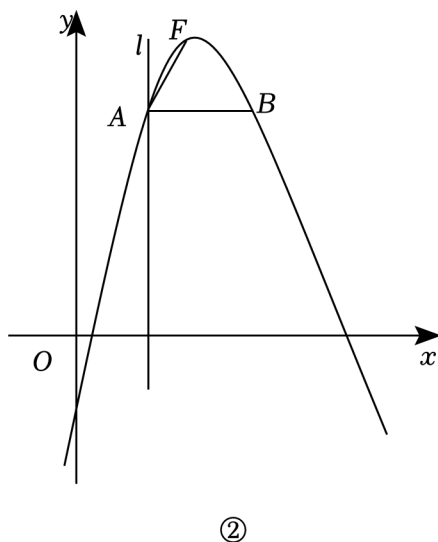
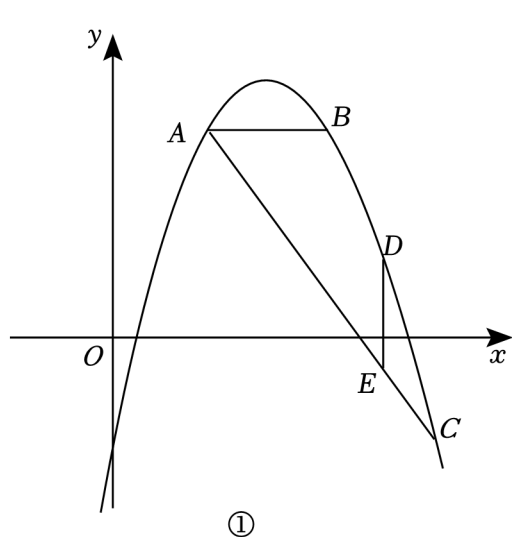


16. 抛物线 $y = ax^2 + 6x + c$ 过 $A(2, 3)$, $B(4, 3)$, $C(6, -5)$ 三点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如图①, 抛物线上一点 D 在线段 AC 的上方, $DE \perp AB$, 交 AC 于点 E , 若满足 $\frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 求点 D 的坐标;

(3) 如图②, F 为抛物线顶点, 过 A 作直线 $l \perp AB$, 若点 P 在直线 l 上运动, 点 Q 在 x 轴上运动, 是否存在这样的点 P 、 Q , 使得 $\triangle BQP$ 与 $\triangle ABF$ 相似 (P 与 F 为对应点), 若存在, 直接写出 P 、 Q 的坐标及此时 $\triangle BQP$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.



17. 如图, 二次函数 $y = x^2 - 3x$ 的图象经过 $O(0, 0)$, $A(4, 4)$, $B(3, 0)$ 三点, 以点 O 为位似中心, 在 y 轴的右侧将 $\triangle OAB$ 按相似比 $2:1$ 放大, 得到 $\triangle OA'B'$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经

过 O, A', B' 三点.

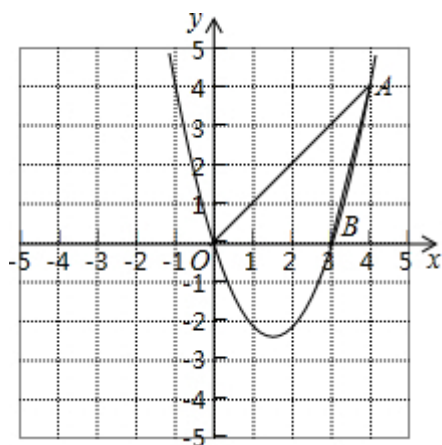
(1) 画出 $\triangle OA' B'$, 试求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的表达式;

(2) 点 $P(m, n)$ 在二次函数 $y=x^2-3x$ 的图象上, $m \neq 0$, 直线 OP 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象交于点 Q (异于点 O).

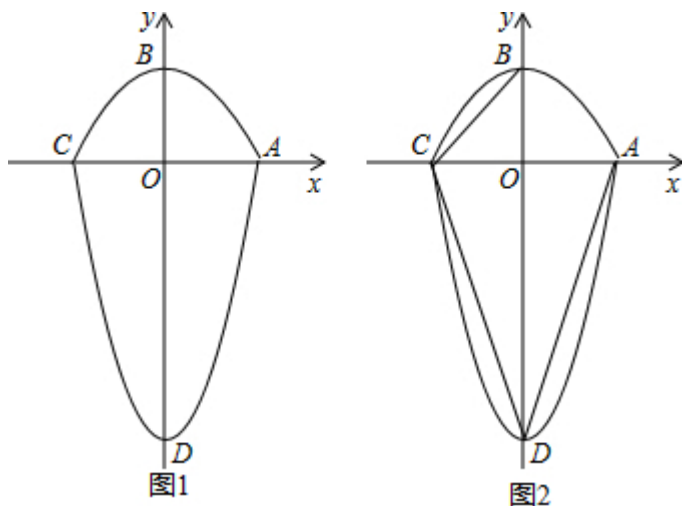
①求点 Q 的坐标 (横、纵坐标均用含 m 的代数式表示)

②连接 AP , 若 $2AP > OQ$, 求 m 的取值范围;

③当点 Q 在第一象限内, 过点 Q 作 QQ' 平行于 x 轴, 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象交于另一点 Q' , 与二次函数 $y=x^2-3x$ 的图象交于点 M, N (M 在 N 的左侧), 直线 OQ' 与二次函数 $y=x^2-3x$ 的图象交于点 P' . $\triangle Q' P' M \sim \triangle QB' N$, 则线段 NQ 的长度等于 6 .



18. 如图 1, 图形 $ABCD$ 是由两个二次函数 $y_1=kx^2+m$ ($k < 0$) 与 $y_2=ax^2+b$ ($a > 0$) 的部分图象围成的封闭图形. 已知 $A(1, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $D(0, -3)$.



- (1) 直接写出这两个二次函数的表达式；
- (2) 判断图形 $ABCD$ 是否存在内接正方形（正方形的四个顶点在图形 $ABCD$ 上），并说明理由；
- (3) 如图 2，连接 BC ， CD ， AD ，在坐标平面内，求使得 $\triangle BDC$ 与 $\triangle ADE$ 相似（其中点 C 与点 E 是对应顶点）的点 E 的坐标．

19. 如图，直线 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 A ， B ．

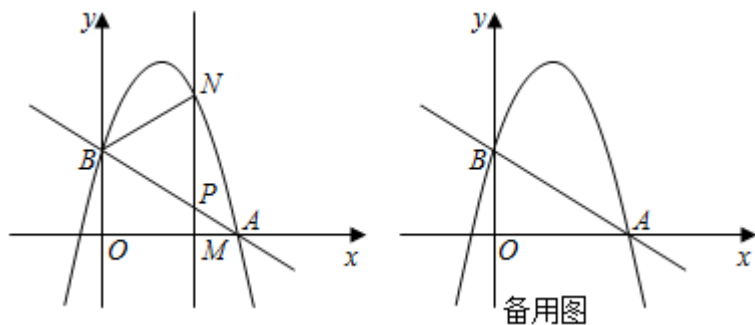
(I) 求抛物线的解析式；

(II) $M(m, 0)$ 为 x 轴上一个动点，过点 M 作直线 MN 垂直于 x 轴，与直线 AB 和抛物线分别交于点

P 、 N .

①点 M 在线段 OA 上运动，若以 B ， P ， N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似，求点 M 的坐标；

②点 M 在 x 轴上自由运动，若三个点 M ， P ， N 中恰有一点是其它两点所连线段的中点（三点重合除外），则称 M ， P ， N 三点为“共谐点”，请直接写出使得 M ， P ， N 三点成为“共谐点”的 m 的值.



20. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $C(0, 2)$.

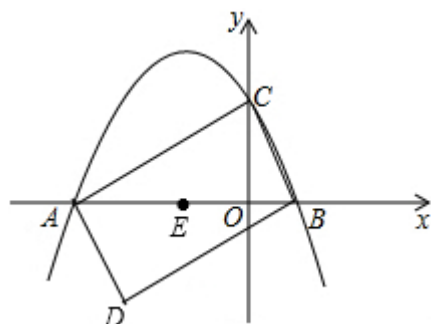
(1) 求抛物线的表达式；

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕 AB 中点 E 旋转 180° ，得到 $\triangle BAD$.

①求点 D 的坐标；

②判断四边形 $ADBC$ 的形状，并说明理由；

(3) 在该抛物线对称轴上是否存在点 F ，使 $\triangle AEF$ 与 $\triangle BAD$ 相似？若存在，求所有满足条件的 F 点的坐标；若不存在，请说明理由。

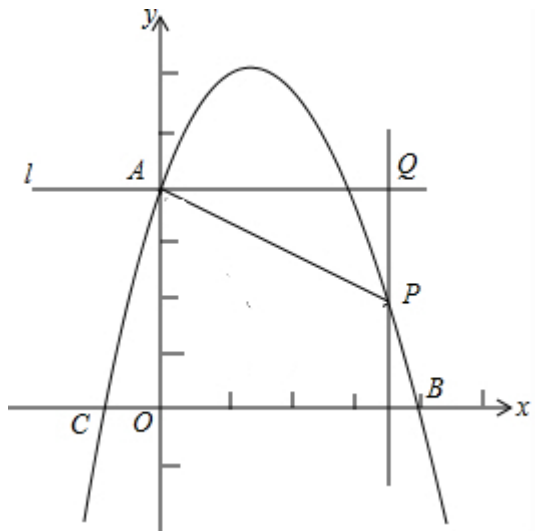


21. 已知抛物线 $y = -x^2 + 3x + 4$ 交 y 轴于点 A ，交 x 轴于点 B ， C （点 B 在点 C 的右侧）。过点 A 作垂直于 y 轴的直线 l 。在位于直线 l 下方的抛物线上任取一点 P ，过点 P 作直线 PQ 平行于 y 轴交直线 l 于点 Q 。连接 AP 。

(1) 写出 A ， B ， C 三点的坐标；

(2) 若点 P 位于抛物线的对称轴的右侧：

- ①如果以 A, P, Q 三点构成的三角形与 $\triangle AOC$ 相似，求出点 P 的坐标；
- ②若将 $\triangle APQ$ 沿 AP 对折，点 Q 的对应点为点 M 。是否存在点 P ，使得点 M 落在 x 轴上？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；
- ③设 AP 的中点是 R ，其坐标是 (m, n) ，请直接写出 m 和 n 的关系式，并写出 m 的取值范围。



22. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 与 x 轴交于 A, B 两点，且 $OA=2OB$ ，与 y 轴交于点 C ，连接 BC ，抛物线对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$ ， D 为第一象限内抛物线上一动点，过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E ，与 AC 交于点 F ，设点 D 的横坐标为 m 。

- (1) 求点 A 的坐标与抛物线的表达式；
- (2) 连接 CD, AD ，设四边形 $OADC$ 的面积为 S 。

①求 S 与 m 的关系式；

②当 S 最大时，求 D 点的坐标．

(3) 若点 P 是对称轴上一点，当 $\triangle DPF \sim \triangle BOC$ 时，求 m 的值．

