

2023-2024 学年上海市崇明区八年级（下）期末数学试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个结论中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列函数中， y 随 x 的增大而增大的是（ ）

- A. $y = x + 2$ B. $y = -x + 2$ C. $y = \frac{2}{x}$ D. $y = -\frac{2}{x}$

2. 二项方程的 $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$ 的实数根是（ ）

- A. 2 B. 4 C. ± 2 D. ± 4

3. 一次函数 $y = x + 1$ 的图象不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 下列方程组是二元二次方程组的是（ ）

- A. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3y = 2 \\ x^2 + xy - x = 2 \end{cases}$

- C. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 5 \\ 3y^2 = x - 1 \end{cases}$

5. 下列事件是确定事件的是（ ）

- A. 方程 $x^3 + 27 = 0$ 有实数根 B. 上海明天下雨
C. 抛掷一枚硬币正面朝上 D. 买一张体育彩票中大奖

6. 下列说法正确的是（ ）

- A. 对角线相等的平行四边形是菱形
B. 对角线相等的菱形是正方形
C. 对角线互相垂直的梯形是等腰梯形
D. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置.】

7. 方程 $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$ 的解是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 方程 $\sqrt{x-1} = 3$ 的解是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 一次函数 $y = 2x + 1$ 的截距是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 如果点 $A(1, n)$ 在一次函数 $y = 3x + 2$ 的图象上，那么 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 如果将直线 $y = \frac{1}{2}x$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位, 那么平移后所得直线的表达式是_____.

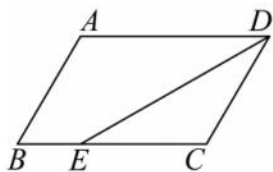
12. 已知方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 2$, 如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$, 那么原方程转化为关于 y 的整式方程为

_____.

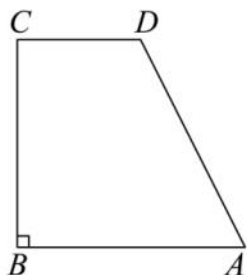
13. 一个不透明的箱子里放着分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的五个球, 它们除了数字不同外其余都相同, 从这个箱子里随机摸出一个球, 摸出的球上所标数字为偶数的概率为_____.

14. 已知一个凸多边形的每个内角都是 120° , 那么它的边数为_____.

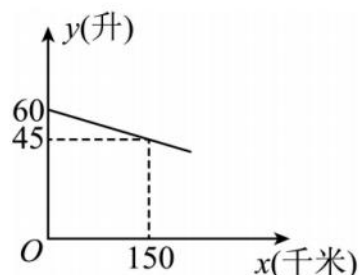
15. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, DE 平分 $\angle ADC$, $AD = 6$, $BE = 2$, 则 $\square ABCD$ 的周长是_____.



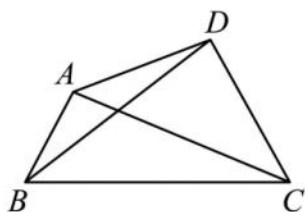
16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, 如果 $AB = 10$, $BC = 8$, $CD = 6$, 那么 AD 边的长是_____.



17. 已知甲乙两地相距 500 千米, 一辆汽车加满 60 升油后由甲地开往乙地, 油箱中的剩余油量 y (升) 与行驶路程 x (千米) 之间是一次函数关系, 其部分图象如图所示. 当油箱中的剩余油量为 20 升时, 汽车距离乙地_____千米.



18. 将连接四边形对边中点的线段称为“中对线”. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD = 8$, 且两条对角线的夹角为 60° , 则该四边形较短的“中对线”的长为_____.

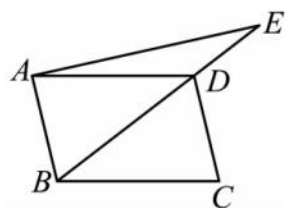


三、解答题（本大题共 7 题，满分 64 分）【请将下列各题的解答过程写在答题纸的相应位置.】

19. 解方程： $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$.

20. 解方程组： $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-4y^2=0 \end{cases}$

21. 如图，点 E 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的延长线上.



(1) 填空： $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} =$ _____, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} =$ _____;

(2) 图中与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量是 _____, 与 $\overrightarrow{AD}$ 相反的向量是 _____;

(3) 求作： $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$ (不写作法，保留作图痕迹，写出结论).

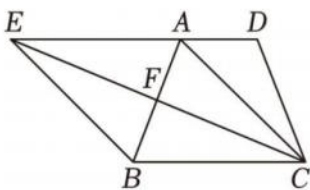
22. 某企业在 2024 年 1 至 3 月的利润情况见表.

月份数 (x)	1	2	3
利润数 (y) (万元)	96	?	100

(1) 如果这个企业在 2024 年 1 至 3 月的利润数 y 是月份数 x 的一次函数，求这个一次函数的解析式，并求出 2 月份的利润;

(2) 这个企业采取技术改革后，实现了利润大幅增长，4、5 月份的利润增长率相同，5 月份获得利润为 121 万元，求这个企业 4、5 月份的利润增长率.

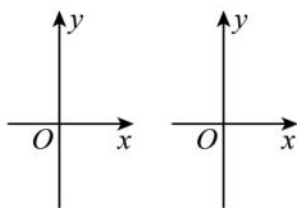
23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AC = BC$, $\angle ACB$ 的平分线交 DA 延长线于点 E , 交 AB 于点 F .



(1) 求证：四边形 $AEBC$ 是菱形；

(2) BD 交 CE 点 G ，如果 $BD \perp BE$ ，求证： $\angle ADB = 2\angle ABD$ 。

24. 在平面直角坐标系 xOy 中（如图），直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B ，点 C 在线段 AB 上。



（备用图）

(1) 求点 A 和点 B 的坐标；

(2) 当点 C 的横坐标是 -4 时，如果在 y 轴上存在点 P ，使得 $S_{\triangle CBP} = 4$ ，求点 P 的坐标；

(3) 当点 C 的横坐标是 m 时，在平面直角坐标系中存在点 Q ，使得以 O 、 C 、 B 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 Q 的坐标。（用含 m 的代数式表示）

2023-2024 学年上海市崇明区八年级（下）期末数学试卷（答案解析）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个结论中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列函数中， y 随 x 的增大而增大的是（ ）

A. $y = x + 2$

B. $y = -x + 2$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数和反比例函数的性质，熟练掌握一次函数和反比例函数的性质是解题关键. 根据一次函数和反比例函数的增减性逐项判定即可得.

【详解】解：A、一次函数 $y = x + 2$ 中， $k = 1 > 0$ ，所以 y 随 x 的增大而增大，则此项符合题意；

B、一次函数 $y = -x + 2$ 中， $k = -1 < 0$ ，所以 y 随 x 的增大而减小，则此项不符合题意；

C、反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中， $k = 2 > 0$ ，所以函数图象位于第一、三象限，在每一象限内， y 随 x 的增大而减小，则此项不符合题意；

D、反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 中， $k = -2 < 0$ ，所以函数图象位于第二、四象限，在每一象限内， y 随 x 的增大而增大，则此项不符合题意；

故选：A.

2. 二项方程的 $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$ 的实数根是（ ）

A. 2

B. 4

C. ± 2

D. ± 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解高次方程，能把高次方程转化成低次方程是解此题的关键.

先移项，方程两边都乘 2，再求出答案即可.

【详解】解： $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$ ，

$$\frac{1}{2}x^4 = 8,$$

$$x^4 = 16,$$

$$x = \pm \sqrt[4]{16},$$

$$\text{即 } x = \pm 2,$$

所以原方程的实数根是 $x = \pm 2$.

故选: C.

3. 一次函数 $y = x + 1$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $k = 1 > 0, b = 1 > 0$ 即可求解.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = x + 1$ 中 $k = 1 > 0, b = 1 > 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = x + 1$ 的图象不经过第四象限,

故选: D.

【点睛】本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

4. 下列方程组是二元二次方程组的是 ()

A.
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 3y = 2 \\ x^2 + xy - x = 2 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 5 \\ 3y^2 = x - 1 \end{cases}$$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了高次方程和二元二次方程组的定义, 能熟记二元一次方程组的定义 (由两个整式方程组成, 方程组中共含有两个不同未知数, 并且所含未知数的项的最高次数是 2, 这样的方程组叫二元二次方程组) 是解此题的关键.

根据二元二次方程组的定义逐个判断即可.

【详解】解: A. 方程组中共含有两个未知数, 并且所含未知数的项的最高次数是 1, 是二元一次方程组, 不是二元二次方程组, 故本选项不符合题意;

B. 方程组中共含有两个未知数, 并且所含未知数的项的最高次数是 2, 是二元二次方程组, 故本选项符合题意;

C. 方程组中两个方程是分式方程, 不是整式方程, 不是二元二次方程组, 故本选项不符合题意;

D. 方程组中第一个方程是无理方程, 不是有理方程, 不是二元二次方程组, 故本选项不符合题意.

故选: B.

5. 下列事件是确定事件的是 ()

- A. 方程 $x^3 + 27 = 0$ 有实数根
- B. 上海明天下雨
- C. 抛掷一枚硬币正面朝上
- D. 买一张体育彩票中大奖

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查随机事件，掌握确定事件与不确定事件的定义是解题的关键.
根据事件发生的可能性大小判断即可.

【详解】解：A、方程 $x^3 + 27 = 0$ ，解得 $x = -3$ ，有实数根，是确定事件，符合题意；
B、上海明天下午是不确定事件，不符合题意；
C、抛掷一枚硬币正面朝上是不确定事件，不符合题意；
D、买一张体育彩票中大奖不确定事件，不符合题意；
故选：A.

6. 下列说法正确的是 ()

- A. 对角线相等的平行四边形是菱形
- B. 对角线相等的菱形是正方形
- C. 对角线互相垂直的梯形是等腰梯形
- D. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了正方形的判定、菱形的判定、矩形的判定及等腰梯形的判定，熟练掌握以上四边形的特征是本题的关键.

分别利用平行四边形的性质、正方形的判定、等腰梯形的判定及矩形的判定方法分别进行分析判断.

【详解】解：A、对角线相等的平行四边形是矩形，不一定是菱形. 对角线垂直平分的平行四边形是菱形，原说法不正确；
B、对角线相等的菱形是正方形，原说法正确；
C、对角线相等的梯形是等腰梯形，原说法不正确；
D、对角线相等的平行四边形是矩形，原说法不正确；
故选：B.

二、填空题(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置.】

7. 方程 $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$ 的解是 $x =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解. 掌握解分式方程的步骤是关键.

根据解分式方程的步骤进行解答.

【详解】 解: $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$,

去分母得: $x-1=3x$,

合并同类项得: $-2x=1$,

解得 $x = -\frac{1}{2}$,

经检验 $x = -\frac{1}{2}$ 是分式方程的解.

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

8. 方程 $\sqrt{x-1}=3$ 的解是 $x =$ _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 能把无理方程转化成有理方程是解此题的关键.

方程两边平方得出 $x-1=9$, 求出方程的解, 再进行检验即可.

【详解】 解: $\sqrt{x-1}=3$,

方程两边平方, 得 $x-1=9$,

解得: $x=10$,

经检验: $x=10$ 是原方程的解.

故答案为: 10.

9. 一次函数 $y=2x+1$ 的截距是 _____.

【答案】 1 或 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质, 熟知一次函数与坐标轴交点的特点是解题的关键.

先令 $x=0$, 求出 y 的值; 再令 $y=0$, 求出 x 的值即可得出结论.

【详解】 解: $\because$ 令 $x=0$, 则 $y=1$;

令 $y=0$ ，则 $x=-\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y=2x+1$ 的截距是 1 或 $-\frac{1}{2}$ 。

故答案为：1 或 $-\frac{1}{2}$ 。

10. 如果点 $A(1, n)$ 在一次函数 $y=3x+2$ 的图象上，那么 $n=$ _____。

【答案】5

【解析】

【分析】本题主要考查了根据一次函数解析式求一次函数值，根据一次函数解析式利用一次函数图象上点的坐标特征可求出 n 值，此题得解。

【详解】解： $\because$ 点 $A(1, n)$ 在一次函数 $y=3x+2$ 的图象上，

$\therefore n=3 \times 1 + 2 = 5$ 。

故答案为：5。

11. 如果将直线 $y=\frac{1}{2}x$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位，那么平移后所得直线的表达式是_____。

【答案】 $y=\frac{1}{2}x-3$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象的几何变换，难度不大，要注意平移后 k 值不变。

根据平移时 k 的值不变，只有 b 发生变化即可得到结论。

【详解】解：原直线 $y=\frac{1}{2}x$ 的 $k=\frac{1}{2}$, $b=0$ ；

向下平移 3 个单位长度，得到了新直线，那么新直线的 $k=\frac{1}{2}$, $b=0-3=-3$ ，

$\therefore$ 新直线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-3$ 。

故答案为： $y=\frac{1}{2}x-3$ 。

12. 已知方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 2$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$ ，那么原方程转化为关于 y 的整式方程为_____。

【答案】 $y^2 - 2y + 1 = 0$

【解析】

【分析】本题考查换元法解分式方程，换元法是解分式方程的常用方法，必须熟练掌握。

结合已知条件换元后再去分母即可。

【详解】解： $y = \frac{x}{x^2-1}$ ，则 $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，

原方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 2$ 化为： $y + \frac{1}{y} = 2$ ，

去分母得： $y^2 + 1 = 2y$ ，

即 $y^2 - 2y + 1 = 0$ ，

故答案为： $y^2 - 2y + 1 = 0$ 。

13. 一个不透明的箱子里放着分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的五个球，它们除了数字不同外其余都相同，从这个箱子里随机摸出一个球，摸出的球上所标数字为偶数的概率为 _____。

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】此题考查了概率公式。用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。

用偶数的个数除以数据的总个数即可求得答案。

【详解】解： $\because$ 一个不透明的箱子里放着分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的五个球，

$\therefore$ 从这个箱子里随机摸出一个球，一共有 5 种可能性，其中摸出的球上所标数字为偶数的有 2 种可能性，

$\therefore$ 摸出的球上所标数字为偶数的概率为 $\frac{2}{5}$ 。

故答案为： $\frac{2}{5}$ 。

14. 已知一个凸多边形的每个内角都是 120° ，那么它的边数为_____。

【答案】 6

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角与外角，熟知：多边形的内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ 是解题的关键。

设凸多边形的边数为 n ，根据题意得， $(n-2) \times 180^\circ = 120^\circ n$ ，即可求出边数 n 。

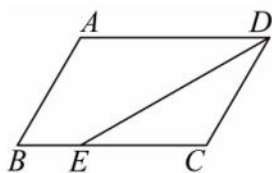
【详解】解：设凸多边形的边数为 n ，

根据题意得， $(n-2) \times 180^\circ = 120^\circ n$ ，

解得 $n = 6$ ，

故答案为： 6。

15. 如图，在 $\square ABCD$ 中， DE 平分 $\angle ADC$ ， $AD = 6$ ， $BE = 2$ ，则 $\square ABCD$ 的周长是_____。



【答案】20

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形对边平行，对边相等的性质，角平分线的定义，等角对等边的性质，是基础题，准确识图并熟练掌握性质是解题的关键．根据角平分线的定义以及两直线平行，内错角相等求出 $\angle CDE = \angle CED$ ，再根据等角对等边的性质可得 $CE = CD$ ，然后利用平行四边形对边相等求出 CD 、 BC 的长度，再求出 $\square ABCD$ 的周长．

【详解】解： $\because DE$ 平分 $\angle ADC$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE，$$

$\because \square ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle CED，$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CED，$$

$$\therefore CE = CD，$$

在 $\square ABCD$ 中， $AD = 6$ ， $BE = 2$ ，

$$\therefore AD = BC = 6，$$

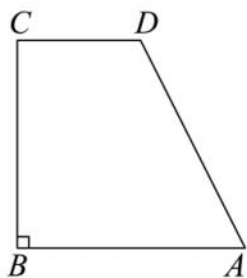
$$\therefore CE = BC - BE = 6 - 2 = 4，$$

$$\therefore CD = AB = 4，$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 的周长} = 6 + 6 + 4 + 4 = 20．$$

故答案为：20

16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， 如果 $AB = 10$ ， $BC = 8$ ， $CD = 6$ ， 那么 AD 边的长是 _____．



【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查矩形的判定和性质，勾股定理，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，根据矩形的性质分别求出 DE 、 AE ，再根据勾股定理计算，得到答案。

【详解】解：如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，

$$\because AB \parallel CD, \angle ABC = 90^\circ, DE \perp AB,$$

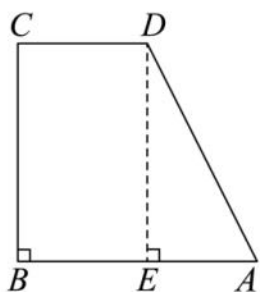
$\therefore$ 四边形 $CBED$ 为矩形，

$$\therefore DE = BC = 8, BE = CD = 6,$$

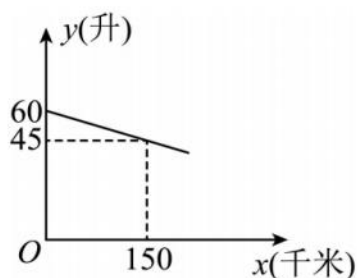
$$\therefore AE = AB - BE = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{由勾股定理得：} AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

故答案为： $4\sqrt{5}$.



17. 已知甲乙两地相距 500 千米，一辆汽车加满 60 升油后由甲地开往乙地，油箱中的剩余油量 y （升）与行驶路程 x （千米）之间是一次函数关系，其部分图象如图所示．当油箱中的剩余油量为 20 升时，汽车距离乙地_____千米．



【答案】 100

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用，掌握待定系数法是解题的关键．

先根据待定系数法求出函数解析式，再求出当 $y = 20$ 时 x 的值，最后求出剩余路程．

【详解】解：设函数解析式为： $y = kx + 60$ ，

$$\text{则：} 45 = 150k + 60,$$

$$\text{解得：} k = -0.1,$$

$$\therefore y = -0.1x + 60,$$

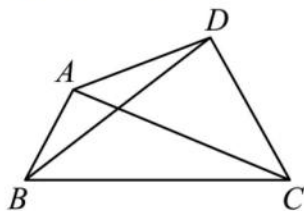
$$\text{当 } y = 20 \text{ 时, } 20 = -0.1x + 60,$$

$$\text{解得: } x = 400,$$

$$\therefore 500 - 400 = 100 \text{ (千米),}$$

故答案为: 100.

18. 将连接四边形对边中点的线段称为“中对线”. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD = 8$, 且两条对角线的夹角为 60° , 则该四边形较短的“中对线”的长为_____.

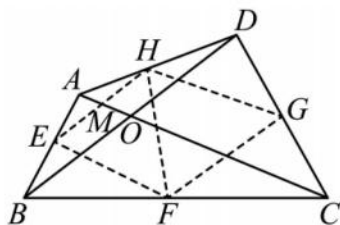


【答案】4

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理可得菱形 $EFGH$, 然后根据菱形的性质及等边三角形的性质可得答案.

【详解】解: 如图, 设两条对角线 AC 、 BD 的夹角为 60° , 取四边的中点并连接起来, 设 AC 与 EH 交点 M .



$\therefore EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD = 4, EH \parallel BD$$

同理, $FG = \frac{1}{2}BD = 4, FG \parallel BD, EF = \frac{1}{2}AC = 4, EF \parallel AC,$

$$HG = \frac{1}{2}AC = 4, HG \parallel AC,$$

$$\therefore EF \parallel HG \parallel AC, EF = FG = HG = HE,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD = 4, EH \parallel BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ = \angle AME,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle FEH = \angle AME = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle HEF$ 为等边三角形,

$$\therefore HF = EH = 4,$$

$\therefore$ 较短的“中对线”长度为 4.

故答案为 2

【点睛】此题考查的是三角形的中位线定理，掌握其定理是解决此题关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 64 分）【请将下列各题的解答过程写在答题纸的相应位置.】

19. 解方程： $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1.$

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】先去分母，将分式方程化为整式方程，再用因式分解法求解，最后进行检验即可.

【详解】解： $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 1,$

$$2x^2 - 8 = x^2 - 2x,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$(x-2)(x+4) = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -4,$$

检验：当 $x = 2$ 时， $x(x-2) = 0$ ；当 $x = -4$ 时， $x(x-2) \neq 0$ ；

$\therefore x = -4$ 是原分式方程的解.

【点睛】本题主要考查了解分式方程和解一元二次方程，解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤.

20. 解方程组： $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-4y^2=0 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$

【解析】

【分析】由第一个方程得到 $x = 3 - y$ ，再代入第二个方程中，解一元二次方程即可求出 y ，再回代第一个方程中即可求出 x .

【详解】解：由题意：
$$\begin{cases} x+y=3 \cdots (1) \\ x^2-4y^2=0 \cdots (2) \end{cases},$$

由方程(1)得到： $x=3-y$ ，再代入方程(2)中：

得到： $(3-y)^2-4y^2=0$ ，

进一步整理为： $3-y=2y$ 或 $3-y=-2y$ ，

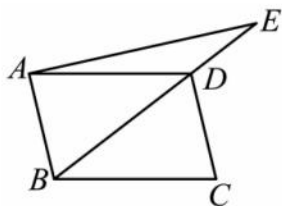
解得 $y_1=1$ ， $y_2=-3$ ，

再回代方程(1)中，解得对应的 $x_1=2$ ， $x_2=6$ ，

故方程组的解为： $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$ 。

【点睛】本题考查了代入消元法解方程及一元二次方程的解法，熟练掌握代入消元法，运算过程中细心即可。

21. 如图，点 E 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的延长线上。



(1) 填空： $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} =$ _____， $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} =$ _____；

(2) 图中与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量是 _____，与 $\overrightarrow{AD}$ 相反的向量是 _____；

(3) 求作： $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$ （不写作法，保留作图痕迹，写出结论）。

【答案】(1) $\vec{0}$ ， $\overrightarrow{BC}$ ；

(2) $\overrightarrow{DC}$ ； $\overrightarrow{DA}$ 或 $\overrightarrow{CB}$

(3) 详见解析

【解析】

【分析】(1) 根据向量的和的定义求解即可；

(2) 根据相等向量，相反向量的定义判断即可；

(3) 分别以 E ， C 为圆心， CD ， DE 为半径作弧，两弧交于点 F ，连接 AE ， CF ， DF ， $\overrightarrow{DF}$ 即为所求。

本题考查了平面向量，平行四边形的性质，向量的问题，熟练掌握平行四边形法则和三角形法则是解题的关键。

【小问 1 详解】

解： $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ，

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{BC}；$$

故答案为： $\vec{0}$ ， $\overrightarrow{BC}$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because ABCD$ 是平行四边形，

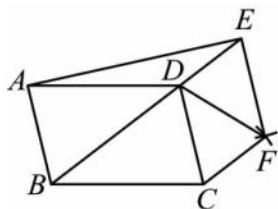
$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 图中与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{DC}$ ，与 $\overrightarrow{AD}$ 相反的向量是 $\overrightarrow{DA}$ 或 $\overrightarrow{CB}$ ；

故答案为： $\overrightarrow{DC}$ ； $\overrightarrow{DA}$ 或 $\overrightarrow{CB}$ ；

【小问 3 详解】

如图， $\overrightarrow{DF}$ 即为所求；



22. 某企业在 2024 年 1 至 3 月的利润情况见表.

月份数 (x)	1	2	3
利润数 (y) (万元)	96	?	100

(1) 如果这个企业在 2024 年 1 至 3 月的利润数 y 是月份数 x 的一次函数，求这个一次函数的解析式，并求出 2 月份的利润；

(2) 这个企业采取技术改革后，实现了利润大幅增长，4、5 月份的利润增长率相同，5 月份获得利润为 121 万元，求这个企业 4、5 月份的利润增长率.

【答案】(1) 这个一次函数的解析式为 $y = 2x + 94$, 2 月份的利润为 98 万元

(2) 这个企业 4、5 月份的利润增长率为 10%

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用以及一次函数的应用, 解题的关键是: (1) 由待定系数法求出 y 关于 x 的函数关系式; (2) 找准等量关系, 正确列出一元二次方程.

(1) 设这个企业在 2022 年 1 至 3 月的利润数 y 与月份数 x 之间的函数关系式是 $y = kx + b (k \neq 0)$, 由待定系数法求出 y 关于 x 的函数关系式, 再代入 $x = 2$, 即可求出 2 月份的利润;

(2) 设这个企业 4、5 月份的利润增长率为 m , 利用这个企业 5 月份的利润 = 这个企业 3 月份的利润 $\times (1 + \text{这个企业 4、5 月份的利润增长率})^2$, 列出一元二次方程, 解之取其符合题意的值即可.

【小问 1 详解】

解: 设这个企业在 2022 年 1 至 3 月的利润数 y 关于月份数 x 的函数关系式是 $y = kx + b (k \neq 0)$,

将 $(1, 96), (3, 100)$ 代入 $y = kx + b$ 得:
$$\begin{cases} k + b = 96 \\ 3k + b = 100 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k = 2 \\ b = 94 \end{cases}$$

$\therefore$ 这个企业在 2022 年 1 至 3 月的利润数 y 与月份数 x 的函数关系式为 $y = 2x + 94$,

当 $x = 2$ 时, $y = 2 \times 2 + 94 = 98$,

答: 这个一次函数的解析式为 $y = 2x + 94$, 2 月份的利润为 98 万元;

【小问 2 详解】

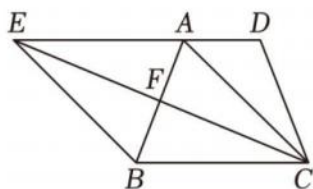
设这个企业 4、5 月的利润增长率为 m ,

根据题意得: $100(1 + m)^2 = 121$,

解得: $m_1 = 0.1 = 10\%, m_2 = -2.1$ (不符合题意, 舍去).

答: 这个企业 4、5 月份的利润增长率为 10%.

23. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB = CD, AC = BC, \angle ACB$ 的平分线交 DA 延长线于点 E , 交 AB 于点 F .



(1) 求证：四边形 $AEBC$ 是菱形；

(2) BD 交 CE 点 G ，如果 $BD \perp BE$ ，求证： $\angle ADB = 2\angle ABD$ 。

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析

【解析】

【分析】本题考查的是梯形的性质、菱形的判定和性质，掌握菱形的判定定理是解题的关键。

(1) 根据等腰三角形的三线合一得到 $AF = FB, CE \perp AB$ ，根据角平分线的定义、平行线的性质得到 $\angle ACE = \angle AEC$ ，得到 $AE = AC$ ，根据菱形的判定定理证明；

(2) 连接 BD ，根据等腰梯形的性质得到 $AC = BD$ ，根据等腰直角三角形的性质求出 $\angle BED = \angle BDE = 45^\circ$ ，根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理求出 $\angle ABD = 22.5^\circ$ ，证明结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because AC = BC, CE$ 是 $\angle ACB$ 的平分线，

$\therefore AF = FB, CE \perp AB, \angle ACE = \angle BCE$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AEC = \angle BCE$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle AEC$ ，

$\therefore AE = AC$ ，

$\because CE \perp AB$ ，

$\therefore EF = FC$ ，

$\because AF = FB$ ，

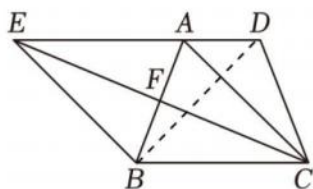
$\therefore$ 四边形 $AEBC$ 为平行四边形，

$\because CE \perp AB$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $AEBC$ 是菱形；

【小问 2 详解】

如图，连接 BD ，



在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB = CD$,

则梯形 $ABCD$ 等腰梯形,

$$\therefore AC = BD,$$

由 (1) 可知: 四边形 $AEBC$ 是菱形,

$$\therefore AC = BE = EA,$$

$$\therefore BE = BD, \angle EAB = \angle EBA,$$

$$\because BD \perp BE,$$

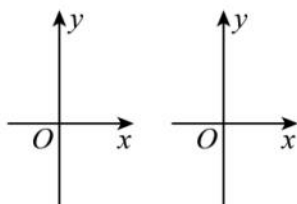
$$\therefore \angle BED = \angle BDE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 2\angle ABD.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B , 点 C 在线段 AB 上.



(备用图)

(1) 求点 A 和点 B 的坐标;

(2) 当点 C 的横坐标是 -4 时, 如果在 y 轴上存在点 P , 使得 $S_{\triangle CBP} = 4$, 求点 P 的坐标;

(3) 当点 C 的横坐标是 m 时, 在平面直角坐标系中存在点 Q , 使得以 O 、 C 、 B 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形, 求点 Q 的坐标. (用含 m 的代数式表示)

【答案】 (1) $A(-8, 0)$ 、 $B(0, 6)$

(2) 点 $P(0, 4)$ 或 $(0, 8)$

(3) $Q\left(-m, -\frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m + 12\right)$

【解析】

【分析】本题为一次函数综合运用，涉及到平行四边形的性质、面积的计算等，分类求解是解题的关键.

(1) 对于 $y = \frac{3}{4}x + 6$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 6$ ，令 $y = \frac{3}{4}x + 6 = 0$ ，则 $x = -8$ ，即可求解；

(2) 由 $S_{\square CBP} = 4 = \frac{1}{2} \times BP \times |x_C| = \frac{1}{2} \times |6 - y| \times 4$ ，即可求解；

(3) 当 OB 为对角线时，由中点坐标公式列出方程组，即可求解；当 OC 或 OQ 为对角线时，同理可解.

【小问 1 详解】

解：对于 $y = \frac{3}{4}x + 6$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 6$ ，

令 $y = \frac{3}{4}x + 6 = 0$ ，则 $x = -8$ ，

即点 A, B 的坐标分别为： $(-8, 0), (0, 6)$ ；

【小问 2 详解】

设点 $P(0, y)$ ，

则 $S_{\square CBP} = 4 = \frac{1}{2} \times BP \times |x_C| = \frac{1}{2} \times |6 - y| \times 4$ ，

解得： $y = 4$ 或 8 ，

即点 $P(0, 4)$ 或 $(0, 8)$ ；

【小问 3 详解】

设点 $C\left(m, \frac{3}{4}m + 6\right)$ ，点 $Q(s, t)$ ，

当 OB 为对角线时，

由中点坐标公式得：
$$\begin{cases} 0 = s + m \\ 6 = t + \frac{3}{4}m + 6 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} s = -m \\ t = -\frac{3}{4}m \end{cases}$$
，

则点 $Q\left(-m, -\frac{3}{4}m\right)$ ；

当 OC 或 OQ 为对角线时，

同理可得： $\begin{cases} m = s \\ \frac{3}{4}m + 6 = t + 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s = m \\ t = \frac{3}{4}m + 6 + 6 \end{cases},$

解得： $\begin{cases} s = m \\ t = \frac{3}{4}m \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s = m \\ t = \frac{3}{4}m + 12 \end{cases},$

即点 $Q\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m + 12\right);$

综上， $Q\left(-m, -\frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m + 12\right).$