2023学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初二数学试卷

（时间90分钟　满分100分）

考生注意：

1．本试卷含三个大题，共24题；答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；

2．除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤．

一．选择题（本大题共6题，每题2分，满分12分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

1. 直线$y=-2x+1$在y轴上的截距是（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

2. 下列关于x的方程中，其中说法正确的是（　　）

A. 方程$x^2+a^3x-1=0$是一元三次方程

B. 方程$4x^3+81=0$是一元三次方程

C. 方程$x=a^2-2a-3$是一元二次方程

D. 方程$3a+2x=5x-\frac{1}{a}$是分式方程

3. 用换元法解关于x的方程$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x}=\frac{7}{2}$，如果设$\frac{x^2-1}{x}=t$，那么原方程可化为（　　）

A. $2t^2-7t+6=0$　　B. $2t^2+7t-6=0$

C. $t^2-7t+3=0$　　D. $t^2+7t+3=0$

4. 已知关于x的一次函数$y=\left(k^2+1\right)x+b$，那么它的图像一定经过（　　）

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第二、三象限　　D. 第二、四象限

5. 下列命题中，真命题是（　　）

A. 若$|\vec{a}|=0$，则$\vec{a}=0$　　B. 若$\vec{a}=\vec{0}$则$|\vec{a}|=\vec{0}$

C. 若$\vec{a}=\vec{0}$，则$-\vec{a}=\vec{0}$　　　　D. 若$\vec{a}=\vec{0}$，则$\left|-\vec{a}\right|=\vec{0}$

6. 已知四边形$ABCD$中，AC与BD交于点O，$AB // CD$，那么下列命题中错误的是（　　）

A. 如果$AB=CD$，$AC\perp BD$，那么四边形$ABCD$是菱形 B. 如果$OB=OD$，$AC\perp BD$，那么四边形$ABCD$是菱形

C. 如果$AB=CD$，$OA=OD$，那么四边形$ABCD$是矩形 D. 如果$AD=BC$，$OA=OB$，那么四边形$ABCD$是矩形

二．填空题（本大题共 10 题，每题 3 分，满分 30 分）

7. 方程$x^3-8=0$的根是_________.

8. 方程$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$的解是________.

9. 已知直线$y=kx+b\left(k<0\right)$经过点$\left(-1,0\right)$，那么不等式$kx+b>0$的解集是________.

10. 在分别标有 1、2、3、4、6 的五张卡片中随机抽取 2 张卡片，那么抽到的卡片上标的数恰好是一个素数和一个合数概率是________.

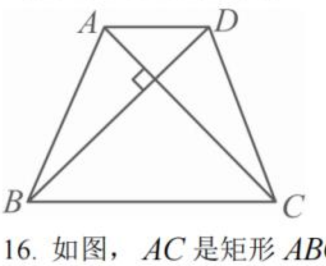
11. 某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，如果这三年中每年的增长率相同，在求这三年中每年的增长率时，如果设这三年中每年的增长率为 x，那么可以列出的方程是____.

12. 已知一个多边形的每个内角都是160°，则这个多边形的边数是_______.

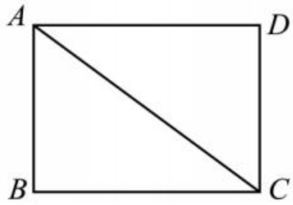
13. 在直角坐标平面内，如果Y $ABCD$的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，已知点$A\left(3,2\right)$，那么点C的坐标是________.

14. 在矩形$ABCD$中，对角线AC,BD交于点O，已知$\angle AOB=120^\circ$，$AD=\sqrt{3}$，那么BD的长是________.

15. 如图，在梯形$ABCD$中，$AD // BC$，$AC\perp BD$，已知$AC=m$，$BD=n$，那么梯形$ABCD$的中位线长是________（用含m、n的式子表示）.



16. 如图，AC是矩形$ABCD$的对角线，已知$AB=6$，$AC=10$，点E在边BC上，将矩形$ABCD$沿直线AE翻折，如果点B恰好落在对角线AC上，那么CE的长是________.



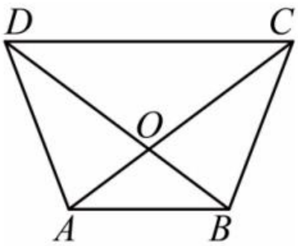
三.（本大题共 8 题，第 17—18 题每题 5 分；第 19—22 题每题 7 分；第 23 题 8 分；第 24 题 12 分；满分 58 分）

17. 解方程：$x+\sqrt{2x-3}=3$．

18. 解方程组：$\begin{cases}x^2+4xy+4y^2=9\\x^2+xy=0\end{cases}$．

19. 某街道因路面经常严重积水，需改建排水系统，市政公司准备安排甲乙两个工程队承接这项工程，据评估，如果甲乙两队合作施工，那么 12 天可完成；如果甲队先做 10 天，剩下的工程由乙队单独承担，还需 15 天完工．求甲乙两队单独完成此项工程各需要多少天？

20. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，AC 与 BD 交于点 O，且 $OD=OC$．



（1）求证：$AD=BC$；

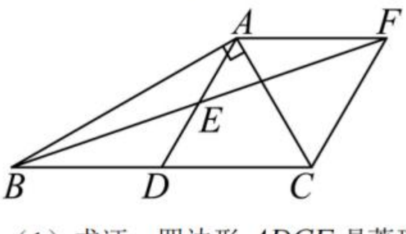
（2）设 $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，当 $CD=2AB$ 时，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$．

21. 某小区为美化小区环境，购买了两种规格的桂花树苗进行栽种，其中 A 种桂花树苗的价格为每株 75 元，B 种桂花树苗的价格为每株 100 元，如果购买这两种桂花树苗共 45 株，其中 A 种桂花树苗的数量不超过 B 种桂花树苗数量的 2 倍．设购买 A 种桂花树苗 x 株，购买 A、B 两种桂花树苗的总费用是 y 元．

（1）求 y 关于 x 的函数关系式；

（2）根据（1）的结论，请你设计一种最省钱的购买方案，并求出此种方案的总费用．

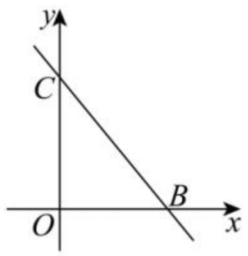
22. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，AD 是斜边 BC 上的中线，点 E 是 AD 的中点，过 A 作 $AF\parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连结 CF．



（1）求证：四边形 $ADCF$ 是菱形；

（2）如果 $AC=6$，四边形 $ADCF$ 的面积是 30，求 AB 的长．

23. 在平面直角坐标系中，已知直线 $y=kx-k\left(k<0\right)$ 经过定点 P．

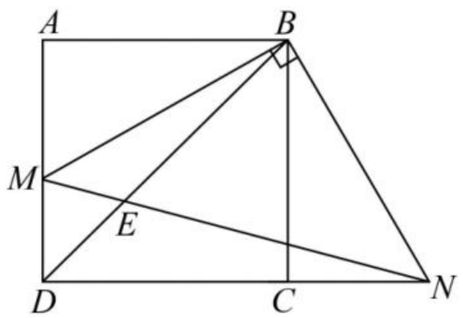


（1）求点 P 的坐标；

（2）一次函数 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$ 的图像分别与 x 轴、y 轴交于点 B、C（如图），如果直线 $y=kx-k(k\neq 0)$ 将 $\triangle BOC$ 的面积平分，求 k 的值；

（3）在（2）的条件下，将直线 $y=kx-k(k\neq 0)$ 向上平移 2 个单位后得到直线 l，点 A 是直线 l 上的点，如果 $AO=AC$，求点 A 的坐标．

24. 如图，点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点，过点 B 作 $BN\perp BM$ 交 DC 的延长线于点 N，连接 MN 交 BD 于点 E．



（1）求 $\angle BMN$ 的大小；

（2）如果 $\angle ABM=2\angle DNM$，求证：$EN=ME+BE$；

（3）如果 $AB=1$，当 $\angle DBN=\angle DNB$ 时，求 DM 的长．

2023学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初二数学试卷（答案解析）

（时间90分钟　满分100分）

考生注意：

1．本试卷含三个大题，共24题；答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；

2．除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤．

一．选择题（本大题共6题，每题2分，满分12分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

1. 直线$y=-2x+1$在y轴上的截距是（　　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与坐标轴的交点问题．解答该题时，需熟练掌握截距的定义：与坐标轴交点的纵坐标或横坐标．

根据在y轴上的截距是“与y轴交点的纵坐标”解答．

【详解】解：当$x=0$时，$y=1$，

∴所以直线$y=-2x+1$在y轴上的截距是1．

故选：C．

2. 下列关于x的方程中，其中说法正确的是（　　）

A. 方程$x^2+a^3x-1=0$是一元三次方程

B. 方程$4x^3+81=0$是一元三次方程

C. 方程$x=a^2-2a-3$是一元二次方程

D. 方程$3a+2x=5x-\dfrac{1}{a}$是分式方程

【答案】B

【解析】

【分析】该题主要考查了一元二次方程、分式方程、一元一次方程、一元三次方程的概念，解题的关键是

熟悉各个方程的概念．

根据方程的概念对选项一一判断即可．

【详解】A．方程$x^2+a^3x-1=0$是一元二次方程，原选项错误，该选项不符合题意；

B．方程$4x^3+81=0$是一元三次方程，原选项正确，该选项符合题意；

C．方程$x=a^2-2a-3$是一元一次方程，原选项错误，该选项不符合题意；

D．方程$3a+2x=5x-\frac{1}{a}$是一元一次方程，原选项错误，该选项不符合题意；

故选：B．

3. 用换元法解关于 x 的方程$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x}=\frac{7}{2}$，如果设$\frac{x^2-1}{x}=t$，那么原方程可化为（　　）

A. $2t^2-7t+6=0$　　B. $2t^2+7t-6=0$

C. $t^2-7t+3=0$　　D. $t^2+7t+3=0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了如何用换元法解分式方程，解题时要注意对方程进行化简．

先把$\frac{x^2-1}{x}=t$代入方程，在进行化简即可求出结果．

【详解】解：如果设$\frac{x^2-1}{x}=t$，

则关于 x 的方程$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x}=\frac{7}{2}$可化为：$\frac{3}{t}+t=\frac{7}{2}$，

可化为：$2t^2-7t+6=0$，

故选：A．

4. 已知关于 x 的一次函数$y=\left(k^2+1\right)x+b$，那么它的图像一定经过（　　）

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第二、三象限　　D. 第二、四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象性质，$y=kx+b\left(k\neq 0\right)$的$\left(k>0\right)$得出一次函数经过第一、三象限，

据此即可作答．

【详解】解：$\because k^2+1>0$，

$\therefore$关于 x 的一次函数 $y=\left(k^2+1\right)x+b$ 经过第一、三象限，

故选：B．

5. 下列命题中，真命题是（　　）

A. 若$|\vec{a}|=0$，则$\vec{a}=0$　　　　B. 若$\vec{a}=\vec{0}$则$|\vec{a}|=\vec{0}$

C. 若$\vec{a}=\vec{0}$，则$-\vec{a}=\vec{0}$　　　　D. 若$\vec{a}=\vec{0}$，则$|-\vec{a}|=\vec{0}$

【答案】C

【解析】

【分析】该题主要考查了零向量、向量的模，解题的关键是掌握以上知识点．

根据零向量、向量的模，判断即可；

【详解】A．若$|\vec{a}|=0$，则$\vec{a}=\vec{0}$，故原说法是假命题，该选项不符合题意；

B．若$\vec{a}=\vec{0}$，则$|\vec{a}|=0$，故原说法是假命题，该选项不符合题意；

C．若$\vec{a}=\vec{0}$，则$-\vec{a}=\vec{0}$，故原说法是真命题，该选项符合题意；

D．若$\vec{a}=\vec{0}$，则$|-\vec{a}|=0$，故原说法是假命题，该选项不符合题意；

故选：C．

6. 已知四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，$AB \parallel CD$，那么下列命题中错误的是（　　）

A. 如果 $AB=CD$，$AC\perp BD$，那么四边形 $ABCD$ 是菱形 B. 如果 $OB=OD$，$AC\perp BD$，那么四边形 $ABCD$ 是菱形

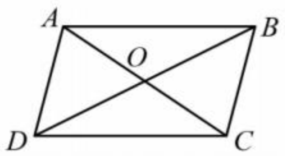
C. 如果 $AB=CD$，$OA=OD$，那么四边形 $ABCD$ 是矩形D. 如果 $AD=BC$，$OA=OB$，那么四边形 $ABCD$ 是矩形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题的真假、菱形的判定、矩形的判定、平行四边形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，结合菱形的判定、矩形的判定、平行四边形的判定与性质进行逐项分析，选出错误的一项，即可作答．

【详解】解：如图：



$\because AB = CD$， $AB // CD$

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\because AC \perp BD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形

故 A 选项是正确的；

$\because AB // CD$

$\therefore \angle ABO = \angle CDO$

$\because OB = OD$， $\angle AOB = \angle COD$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$

$\therefore AB = DC$

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\because AC \perp BD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形

故 B 选项是正确的；

$\because AB = CD$， $AB // CD$

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\because OA = OD$

$\therefore AC = BD$

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是矩形

故 C 选项是正确的；

$\because AD = BC$， $OA = OB$，

$\therefore$无法证明 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$

$\therefore$无法证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形

故 D 选项是错误的；

故选：D.

二．填空题（本大题共 10 题，每题 3 分，满分 30 分）

7. 方程 $x^3 - 8 = 0$ 的根是__________.

【答案】x=2

【解析】

【分析】首先整理方程得出 $x^3=8$，进而利用立方根的性质求出 x 的值．

【详解】解：$x^3-8=0$，

$x^3=8$，

解得：$x=2$．

故答案为：$x=2$．

【点睛】此题主要考查了立方根的性质，正确由立方根定义求出是解题关键．

8．方程 $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$ 的解是________．

【答案】$x=-2$

【解析】

【分析】本题考查解分式方程，特别注意解分式方程时必须进行检验．

根据解分式方程的步骤解方程即可．

【详解】解：原方程两边同乘 $\left(x^2-1\right)$ 得：$x(x+1)=2$，

整理得：$x^2+x-2=0$，

因式分解得：$(x-1)(x+2)=0$，

解得：$x_1=1, x_2=-2$，

将 $x=1$ 代入 $\left(x^2-1\right)$ 中可得 $1-1=0$；

将 $x=-2$ 代入 $\left(x^2-1\right)$ 中可得 $4-1=3\neq 0$；

则 $x=1$ 是原方程的增根，

故原分式方程的解为：$x=-2$．

故答案为：$x=-2$．

9．已知直线 $y=kx+b\left(k<0\right)$ 经过点 $\left(-1,0\right)$，那么不等式 $kx+b>0$ 的解集是________．

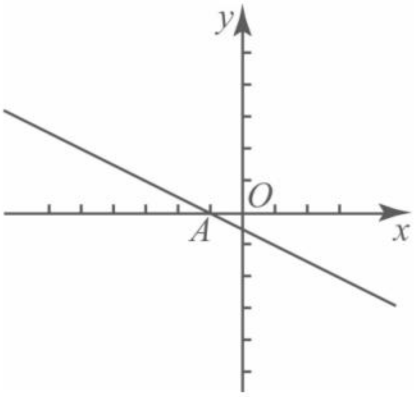
【答案】$x<-1$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式的关系：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y=kx+b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；从函数图象的角度看，就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上(或下)方部分所有的点的横坐标所构成的集合．

不等式 $kx+b>0$ 的解集为直线 $y=kx+b$ 落在 x 轴上方的部分对应的 x 的取值范围．

【详解】解：∵直线 $y=kx+b\left(k<0\right)$ 经过点 $A\left(-1,0\right)$，如图所示，



∴不等式 $kx+b>0$ 的解集为直线 $y=kx+b$ 落在 x 轴上方的部分对应的 x 的取值范围，

即 $x<-1$.

故答案为：$x<-1$.

10. 在分别标有 1、2、3、4、6 的五张卡片中随机抽取 2 张卡片，那么抽到的卡片上标的数恰好是一个素数和一个合数概率是________.

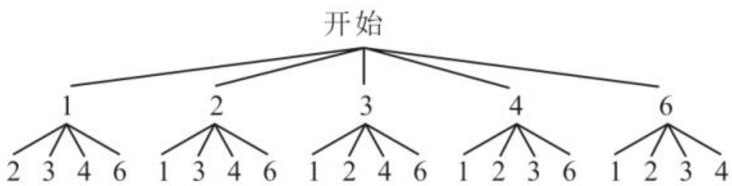
【答案】$\frac{2}{5}$##0.4

【解析】

【分析】本题考查利用列表法或画树状图法求概率．正确列出表格或画出树状图分析出抽到所有可能结果共有 20 种，其中一个是素数一个是合数的共有 8 种是解题的关键.

先画树状图分析出抽到所有可能结果共有 20 种，其中一个是素数一个是合数的共有 8 种，然后由概率公式计算即可.

【详解】解：画树状图为：



由图可得抽到所有可能结果共有 20 种，其中一个是素数一个是合数的共有 8 种，

∴抽到的卡片上标的数恰好是一个素数和一个合数概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，

故答案为：$\frac{2}{5}$.

11. 某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，如果这三年中每年的增长率相同，在求这三年中每年的增长率时，如果设这三年中每年的增长率为 x，那么可以列出的方程是____.

【答案】1000（1+x）^{2}=1331

【解析】

【详解】由于某企业的年产值三年内从1000万元增加到1331万元，如果这三年中每年的增长率相同，在求这三年中每年的增长率时设这三年中每年的增长率为x，那么第二年变为1000（1+x），然后依此类推即可列出方程.

解：∵企业的年产值三年内从1000万元增加到1331万元，这三年中每年的增长率相同，

∴设这三年中每年的增长率为x，那么可以列出的方程是

1000（1+x）^{2}=1331.

12. 已知一个多边形的每个内角都是160°，则这个多边形的边数是______.

【答案】18

【解析】

【分析】首先计算出多边形的外角的度数，再根据外角和÷外角度数＝边数可得答案.

【详解】解：∵多边形每一个内角都等于160°

∴多边形每一个外角都等于

$180^{\circ}-160^{\circ}=20^{\circ}$

∴边数$n=360^{\circ}\div 20^{\circ}=18$

故答案为：18

【点睛】此题主要考查了多边形的外角与内角，解题的关键是掌握多边形的外角与它相邻的内角互补，外角和为360°.

13. 在直角坐标平面内，如果Y $ABCD$的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，已知点$A\left(3,2\right)$，那么点C的坐标是_______.

【答案】$\left(-3,-2\right)$

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，点坐标．熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

由Y $ABCD$的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，点$A\left(3,2\right)$，可得$C\left(-3,-2\right)$.

【详解】解：∵Y $ABCD$的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，点$A\left(3,2\right)$，

∴$O\left(0,0\right)$是AC的中点，

∴$C\left(-3,-2\right)$，

故答案为：$\left(-3,-2\right)$.

14. 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O，已知 $\angle AOB = 120°$，$AD = \sqrt{3}$，那么 BD 的长是________.

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质，直角三角形的性质，求出 $\angle OBA = 30°$ 是解题的关键.

由矩形的性质和等腰三角形的性质求出 $\angle OBA = 30°$，在由直角三角形的性质即可求解.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

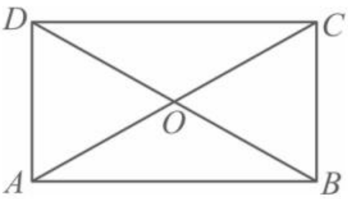
$\therefore AC = BD, AO = BO = OD$，$\angle DAB = 90°$，

Q $\angle AOB = 120°$，

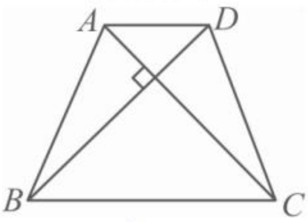
$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30°$，

$\therefore BD = 2AD = 2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$.



15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AC \perp BD$，已知 $AC = m$，$BD = n$，那么梯形 $ABCD$ 的中位线长是________（用含 m、n 的式子表示）.



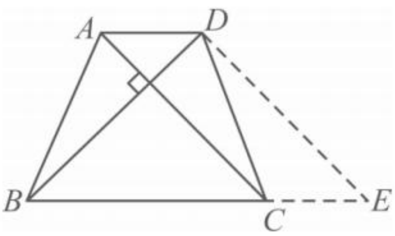
【答案】$\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的判定与性质，梯形中位线性质，勾股定理，正确作出辅助线构造平行四边形是解题的关键.

过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E，证明四边形 $ACED$ 是平行四边形，得到 $AD = CE$，$DE = AC = m$，再证明 $\angle BDE = 90°$，然后由勾股定理，求得 $BE = \sqrt{m^2+n^2}$，从而求得 $AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{m^2+n^2}$，然后由梯形的中位线定理求解即可.

【详解】解：过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E，如图，



$\because AD \parallel BC$，$DE \parallel AC$，

$\therefore$四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\therefore AD = CE$，$DE = AC = m$，

$\because AC \perp BD$，$DE \parallel AC$，

$\therefore DE \perp BD$，

$\therefore \angle BDE = 90°$，

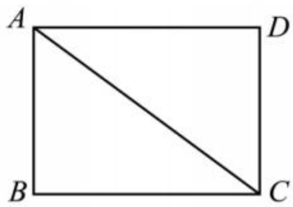
由勾股定理，得 $BE = \sqrt{CE^2 + BD^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$，

$\therefore AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{m^2 + n^2}$，

$\therefore$梯形 $ABCD$ 的中位线长 $= \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$．

16. 如图，AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线，已知 $AB = 6$，$AC = 10$，点 E 在边 BC 上，将矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 翻折，如果点 B 恰好落在对角线 AC 上，那么 CE 的长是________．



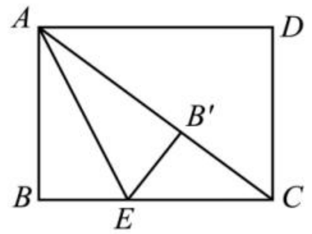
【答案】5

【解析】

【分析】本题考查矩形折叠问题，勾股定理，熟练掌握矩形与折叠的性质是解题的关键．

先由勾股定理，求得 $BC = 8$，再根据折叠的性质得 $AB' = AB = 6$，$BE = B'E$，$\angle AB'E = \angle CB'E = \angle B = 90°$，设 $BE = B'E = x$，则 $CE = 8 - x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CB'E$ 中由勾股定理，得 $4^2 + x^2 = (8 - x)^2$，解之即可求得 x 值，从而求解．

【详解】解：如图，设点 B 恰好落在对角线 AC 上的点为 B'，



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ Ð$B=90^\circ$，

由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

由折叠可得：$AB'=AB=6$，$BE=B'E$，$\angle AB'E=\angle CB'E=\angle B=90^\circ$，

∴ $CB'=AC-AB'=4$，

设 $BE=B'E=x$，则 $CE=BC-BE=8-x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CB'E$ 中由勾股定理，得 $4^2+x^2=(8-x)^2$

解得：$x=3$，

∴ $CE=8-x=8-3=5$，

故答案为：5．

三．（本大题共 8 题，第 17—18 题每题 5 分；第 19—22 题每题 7 分；第 23 题 8 分；第 24 题 12 分；满分 58 分）

17. 解方程：$x+\sqrt{2x-3}=3$．

【答案】$x=2$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解法解一元二次方程．熟练掌握解一元二次方程是解题的关键．

由 $\sqrt{2x-3}=3-x$，可得 $2x-3=(3-x)^2$，整理得 $x^2-8x+12=0$，然后计算求出满足要求的解即可．

【详解】解：$x+\sqrt{2x-3}=3$，

$\sqrt{2x-3}=3-x$，

$2x-3=(3-x)^2$，

$2x-3=9-6x+x^2$，

$x^2-8x+12=0$，

$(x-2)(x-6)=0$，

解得，$x_1=2$，$x_2=6$，

检验，当$x=2$时，$x+\sqrt{2x-3}=3$，当$x=6$时，$x+\sqrt{2x-3}=9\neq 3$，

∴方程的解为$x=2$.

18. 解方程组：$\begin{cases}x^2+4xy+4y^2=9\\x^2+xy=0\end{cases}$.

【答案】$\begin{cases}x=0\\y=1.5\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\y=-1.5\end{cases}$，$\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$.

【解析】

【分析】先把原方程组的每个方程化简，这样原方程组转化成四个方程组，求出每个方程组的解即可.

【详解】$\begin{cases}x^2+4xy+4y^2=9①\\x^2+xy=0②\end{cases}$

由①得：（x+2y）^{2}=9，

x+2y=±3，

由②得：x（x+y）=0，

x=0，x+y=0，

即原方程组化为：$\begin{cases}x+2y=3\\x=0\end{cases}$，$\begin{cases}x+2y=3\\x+y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x+2y=-3\\x=0\end{cases}$，$\begin{cases}x+2y=-3\\x+y=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=0\\y=1.5\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\y=-1.5\end{cases}$，$\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$，

所以原方程组的解为：$\begin{cases}x=0\\y=1.5\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\y=-1.5\end{cases}$，$\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$.

【点睛】本题考查了解二元一次方程组和解高次方程组，能把高次方程组转化成二元一次方程组是解此题的关键.

19. 某街道因路面经常严重积水，需改建排水系统，市政公司准备安排甲乙两个工程队承接这项工程，据评估，如果甲乙两队合作施工，那么12天可完成；如果甲队先做10天，剩下的工程由乙队单独承担，还需15天完工．求甲乙两队单独完成此项工程各需要多少天？

【答案】甲乙两队单独完成此项工程分别需要20天和30天.

【解析】

【分析】此题考查了分式方程的应用，正确理解题意找准等量关系列出方程是解答此题的关键.

设甲乙两队单独完成此项工程分别需要x天和y天．根据“甲乙两个工程队合作施工12天可以完成”工程，

可得等量关系：甲队 12 天的工作量＋乙队 12 天的工作量＝该项工程总量．根据“甲队先做 10 天后，剩下的工程由乙队单独承担，还需 15 天才能完工”，可得等量关系：甲队 10 天的工作量＋乙队 15 天的工作量＝该项工程总量．据此列方程组求解即可．

【详解】解：设甲乙两队单独完成此项工程分别需要 x 天和 y 天．根据题意，可列出方程组：

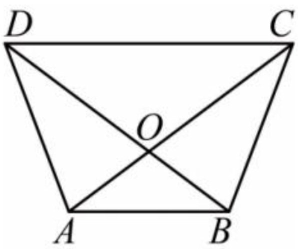
$$\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1\\ \frac{10}{x}+\frac{15}{y}=1\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases}$，

经检验$\begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases}$是原方程组的解，且符合题意，

答：甲乙两队单独完成此项工程分别需要 20 天和 30 天．

20. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\,//\,CD$，AC 与 BD 交于点 O，且 $OD=OC$．



（1）求证：$AD=BC$；

（2）设 $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，当 $CD=2AB$ 时，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$．

【答案】（1）见详解　　（2）$\overrightarrow{AC}=2\vec{b}-\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查平面向量、全等三角形的判定与性质，

（1）由题意可得 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$，根据对应边相等可得答案．

（2）由题意得，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}=2\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，进而可得答案．

【小问 1 详解】

证明：$\because AB\,//\,CD$，

$\therefore \angle CDO=\angle ABO$，$\angle BAO=\angle DCO$，

$\because OD=OC$

$\therefore \angle CDO=\angle DCO$

$\therefore \angle ABO = \angle BAO$

$\therefore AO = OB$

$\because \angle AOD = \angle BOC$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$，

$\therefore AD = BC$.

【小问 2 详解】

$\because AB \parallel CD$，$CD = 2AB$，$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$

$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \vec{a}$

21. 某小区为美化小区环境，购买了两种规格的桂花树苗进行栽种，其中 A 种桂花树苗的价格为每株 75 元，B 种桂花树苗的价格为每株 100 元，如果购买这两种桂花树苗共 45 株，其中 A 种桂花树苗的数量不超过 B 种桂花树苗数量的 2 倍．设购买 A 种桂花树苗 x 株，购买 A、B 两种桂花树苗的总费用是 y 元．

（1）求 y 关于 x 的函数关系式；

（2）根据（1）的结论，请你设计一种最省钱的购买方案，并求出此种方案的总费用．

【答案】（1）y 与 x 的函数关系式为 $y = -25x + 4500$

（2）购买 A 种树苗 30 棵；B 种树苗 15 棵时费用最少，最少费用为 3750 元

【解析】

【分析】本题考查一次函数的应用、一元一次不等式的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和不等式的性质解答．

（1）根据题意，可以写出 y 与 x 的函数关系式；

（2）根据购买 A 种树苗的数量不少于 B 种树苗的数量的 2 倍，可以求得 x 的取值范围，然后根据一次函数的性质，即可得到最少的购买方案和此时的费用．

【小问 1 详解】

解：由题意可得，$y = 75x + 100(45 - x) = -25x + 4500$

即 y 与 x 的函数关系式为 $y = -25x + 4500$；

【小问 2 详解】

$\because$购买 A 种树苗的数量不超过 B 种树苗的数量的 2 倍，

$\therefore x \le 2(45-x)$,

解得，$x \le 30$,

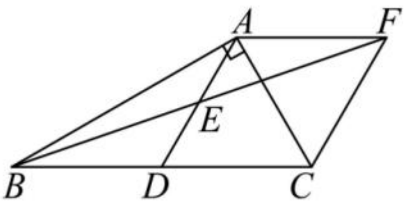
$\because$ $y=-25x+4500, k=-25<0$,

$\therefore$ y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=30$ 时，y 有最小值，此时 $y=30\times(-25)+4500=3750, 45-x=15$,

答：购买 A 种树苗 30 棵；B 种树苗 15 棵时费用最少，最少费用为 3750 元.

22. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，AD 是斜边 BC 上的中线，点 E 是 AD 的中点，过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连结 CF.



（1）求证：四边形 $ADCF$ 是菱形；

（2）如果 $AC=6$，四边形 $ADCF$ 的面积是 30，求 AB 的长.

【答案】（1）见详解　（2）$AB=10$

【解析】

【分析】本题考查了斜边上的中线等于斜边的一半、菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

（1）先证明$\triangle AEF \cong \triangle DEB$，得 $AF=BC$，结合斜边上的中线等于斜边的一半，得出 $AF=DC$，因为 $AF \parallel BC$，证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形，因为 $AD=DC$，所以证明四边形 $ADCF$ 是菱形；

（2）先证明四边形 $ABDF$ 是平行四边形，得出 $AB=DF$，由四边形 $ADCF$ 是菱形，得出 $\frac{1}{2}AC\times DF=30$，把 $AC=6$ 代入计算，即可作答.

【小问 1 详解】

解：$\because$ 点 E 是 AD 的中点，

$\therefore AE=DE$,

$\because AF \parallel BC$,

$\therefore \angle AFE=\angle DBE$,

$\because \angle AEF=\angle DEB$,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB$,

$\therefore AF=BC$,

$\because \angle BAC = 90°$，$AD$ 是斜边 BC 上的中线，

$\therefore AD = DB = CD$，

$\therefore AF = DC$，

$\because AF \parallel BC$，

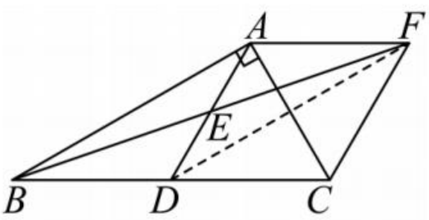
$\therefore$四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$\because AD = DC$，

$\therefore$四边形 $ADCF$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：连接 DF，如图所示：



由（1）知 $AF = BC$

$\because AF \parallel BC$

$\therefore$四边形 $ABDF$ 是平行四边形，

$\therefore AB = DF$

$\because$四边形 $ADCF$ 是菱形

$\therefore AC \perp BD$

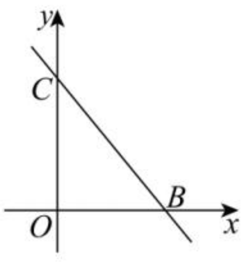
$\because AC = 6$，菱形 $ADCF$ 的面积是 30，

$\therefore \dfrac{1}{2}AC \times DF = \dfrac{1}{2} \times 6 \times DF = 30$

$\therefore DF = 10$

$\therefore AB = DF = 10$.

23. 在平面直角坐标系中，已知直线 $y = kx - k\left(k < 0\right)$ 经过定点 P.



（1）求点 P 的坐标；

（2）一次函数 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 的图像分别与 x 轴、y 轴交于点 B、C（如图），如果直线 $y=kx-k(k\neq 0)$ 将 $\triangle BOC$ 的面积平分，求 k 的值；

（3）在（2）的条件下，将直线 $y=kx-k(k\neq 0)$ 向上平移 2 个单位后得到直线 l，点 A 是直线 l 上的点，如果 $AO=AC$，求点 A 的坐标．

【答案】（1）$(1,0)$

（2）$k=-12$

（3）$(1,2)$

【解析】

【分析】（1）$x=1$ 代入 $y=kx-k$，求得 $y=0$，即可求解；

（2）先求出直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与坐标轴的交点坐标：$B(3,0)$，$C(0,4)$，从而求得 $S_{\triangle BOC}=6$，$PB=OB-OP=2$，不规则设直线直线 $y=kx-k(k<0)$ 与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相交于 $D(x,kx-k)$，根据 $S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}S\triangle BOC=3$，则 $\frac{1}{2}\times 2(kx-k)=3$，解得：$x=\frac{k+3}{k}$，

把 $D(x,kx-k)$ 代入 $y=-\frac{4}{3}x+4$，得 $-\frac{4}{3}x+4=kx-k$，则有 $-\frac{4}{3}\times\frac{k+3}{k}+4=k\cdot\frac{k+3}{k}-k$，解之即可求得 k 值．

（3）先根据平移性质求得直线 l 解析式为 $y=-12x+14$，过点 A 作 $AE\perp y$ 于 E，根据等腰三角形的性质求得 $OE=\frac{1}{2}OC=2$，则点 A 的纵坐标为 2，把 $y=2$ 代入 $y=-12x+14$，得 $2=-12x+14$，解得：$x=1$，即可得出点 A 坐标．

【小问 1 详解】

解：把 $x=1$ 代入 $y=kx-k$，得 $y=k-k=0$，

$\therefore$ 直线 $y=kx-k(k<0)$ 经过定点 $P(1,0)$．

【小问 2 详解】

解：令 $x=0$，则 $y=4$，

$\therefore C(0,4)$，

$\therefore OC=4$，

令 $y=0$，则 $-\frac{4}{3}x+4=0$，解得：$x=3$，

$\therefore B(3,0)$，

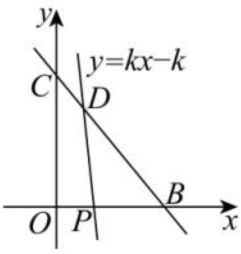
$\therefore OB=3$，

$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，

$\because P(1,0)$，

$\therefore PB=OB-OP=2$，

设直线 $y=kx-k(k<0)$ 与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相交于 $D(x,kx-k)$，如图，



$\because$ 直线 $y=kx-k(k\neq0)$ 将 $\triangle BOC$ 的面积平分，

$\therefore S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BOC}=3$

$\therefore \frac{1}{2}\times2(kx-k)=3$，

解得：$x=\frac{k+3}{k}$，

把 $D(x,kx-k)$ 代入 $y=-\frac{4}{3}x+4$，得 $-\frac{4}{3}x+4=kx-k$，

$\therefore -\frac{4}{3}\times\frac{k+3}{k}+4=k\cdot\frac{k+3}{k}-k$，

解得：$k=-12$．

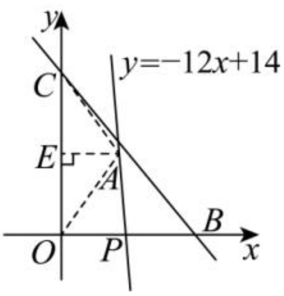
【小问 3 详解】

解：由（2）知：$y=-12x+12$，

直线 $y=-12x+12$ 向上平移 2 个单位后得到直线 l，

则直线 l 解析式为 $y=-12x+14$，

如图，过点 A 作 $AE\perp y$ 于 E，



$\because OA=AC$，$AE\perp y$，

$\therefore OE=\frac{1}{2}OC=2$

∴点 A 的纵坐标为 2，

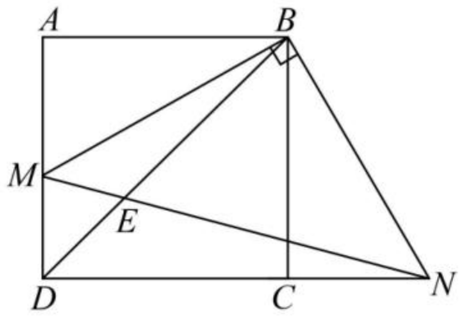
把 $y=2$ 代入 $y=-12x+14$，得 $2=-12x+14$，

解得：$x=1$，

∴点 A 的坐标为 $(1,2)$．

【点睛】本题考查待定系数法求一次函数解析式，两直线交点，坐标与图形，直线与坐标围砀三角形面积，一次函数图象平移，等腰三角形的性质．熟练掌握一次函数图象性质是解题的关键．

24. 如图，点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点，过点 B 作 $BN\perp BM$ 交 DC 的延长线于点 N，连接 MN 交 BD 于点 E.



（1）求 $\angle BMN$ 的大小；

（2）如果 $\angle ABM=2\angle DNM$，求证：$EN=ME+BE$；

（3）如果 $AB=1$，当 $\angle DBN=\angle DNB$ 时，求 DM 的长．

【答案】（1）$\angle BMN=45°$；

（2）见解析　（3）$DM=2-\sqrt{2}$．

【解析】

【分析】（1）利用等角的余角相等求得 $\angle ABM=\angle CBN$，证明 $\triangle ABM\cong\triangle CBN(\mathrm{ASA})$，可证明 $BM=BN$，可求得 $\triangle BMN$ 是等腰直角三角形，据此即可求解；

（2）在 EN 上截取点 F，使 $EF=EB$，连接 BF，证明 $\triangle BEF$ 是等边三角形，再证明 $\triangle BEM\cong\triangle BFN(\mathrm{AAS})$，据此即可证明 $EN=ME+BE$；

（3）由已知结合 $\triangle ABM\cong\triangle CBN$，证明 BM 是 $\angle ABD$ 的角平分线，作 $MG\perp BD$ 于点 G，据此求解即可．

【小问 1 详解】

解：∵正方形 $ABCD$，

$\therefore AB=BC$，$\angle A=\angle BCD=\angle BCN=90°$，

$\because BN \perp BM$，

$\therefore \angle MBN = 90°$，

$\therefore \angle ABM = 90° - \angle MBC = \angle CBN$，

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CBN (\text{ASA})$，

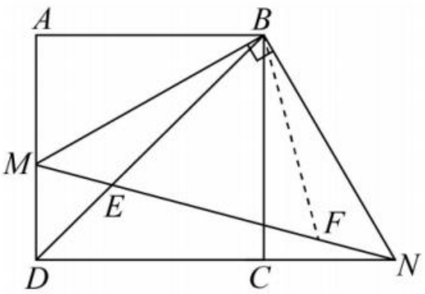
$\therefore BM = BN$，

$\therefore \triangle BMN$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BMN = 45°$；

【小问 2 详解】

解：在 EN 上截取点 F，使 $EF = EB$，连接 BF，



由（1）知 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$，

$\therefore \angle AMB = \angle CNB$，$\angle BMN = \angle BNM = \angle BDM = 45°$，

$\therefore \angle DBM = \angle AMB - 45° = \angle CNB - 45° = \angle DNM$，

$\because \angle ABM = 2\angle DNM$，

$\therefore \angle ABM = 2\angle DBM$，

$\because \angle ABM + \angle DBM = 45°$，

$\therefore \angle DBM = \angle DNM = 15°$，

$\therefore \angle BEN = \angle BDN + \angle DNM = 60°$，

$\therefore \triangle BEF$ 是等边三角形，

$\therefore BE = BF$，$\angle BEM = \angle BFN = 120°$，

$\because \angle BMN = \angle BNM = 45°$，

$\therefore \triangle BEM \cong \triangle BFN (\text{AAS})$，

$\therefore ME = FN$，

$\therefore EN = FN + EF = ME + BE$；

【小问 3 详解】

解：由（1）知 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$，

$\therefore \angle ABM=\angle CBN$，

$\because$正方形 $ABCD$，

$\therefore \angle ABD=\angle CDB=\angle CBD=45°$，

$\because \angle DBN=\angle DNB$，

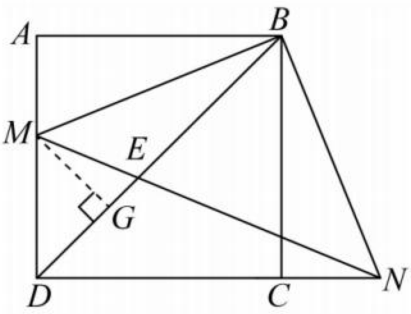
$\therefore \angle DBN=\angle DNB=\frac{1}{2}\left(180°-45°\right)=67.5°$，

$\therefore \angle ABM=\angle CBN=67.5°-45°=22.5°$，

$\therefore \angle DBM=45°-22.5°=22.5°=\angle ABM$，

即 BM 是 $\angle ABD$ 的角平分线，

作 $MG\perp BD$ 于点 G，



则 $AM=MG$，

$\because BM=BM$，$\angle BMA=\angle BMG=90°$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BMA\cong \mathrm{Rt}\triangle BMG\left(\mathrm{HL}\right)$，

$\therefore BG=AB=1$，

$\because$正方形 $ABCD$，$AB=1$，

$\therefore BD=\sqrt{2}$，$\angle MDG=45°$，

$\therefore DG=\sqrt{2}-1$，$\triangle GMD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore DM=\sqrt{2}DG=2-\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，正确引出辅助线解决问题是解题的关键．