虹口区2023学年度第二学期初二年级期末学生学习诊断练习

数学 练习卷

（满分100分，时间90分钟）

注意：

1.本练习卷含三个大题，共25题．答题时，请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本练习卷上答题一律无效．

2.除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤．

一、选择题：（本大题共6题，每题2分，满分12分）［下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上．］

1. 下列四个函数中，一次函数是（　　）

A. $y=x^2-2x$　　B. $y=2x-1$　　C. $y=\frac{1}{x}+3$　　D. $y=\sqrt{x}+1$

2. 已知一次函数$y=(3-m)x+3$，如果函数值y随x增大而减小，那么m的取值范围是（　　）

A. $m>3$　　B. $m<3$　　C. $m\geq 3$　　D. $m\leq 3$

3. 下列事件中，必然事件是（　　）

A. 上海明天太阳从西边升起

B. 任意选取两个非零实数，它们的积为正

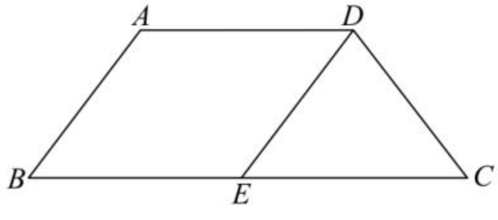
C. 抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面朝上

D. 在平面内画一个平行四边形，它的内角和等于360度

4. 下列方程中，有实数解的是（　　）

A. $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$　　B. $x^2+1=0$　　C. $\sqrt{x^2-1}=0$　　D. $\frac{1}{x^2+1}=0$

5. 如图，在梯形$ABCD$中，$AD\,//\,BC$，点E是边BC的中点，连接DE，$DE\,//\,AB$，下列向量中，不是$\overrightarrow{AD}$的相反向量的是（　　）



A. $\overrightarrow{DA}$　　B. $\overrightarrow{EB}$　　C. $\overrightarrow{CE}$　　D. $\overrightarrow{BC}$

6. 小明用四根相同长度的木条制作了一个正方形学具（如图 1），测得对角线 $AC=10\sqrt{2}\text{cm}$，将正方形学具变形为菱形（如图 2），$\angle DAB=60°$，则图 2 中对角线 AC 的长为（　　）

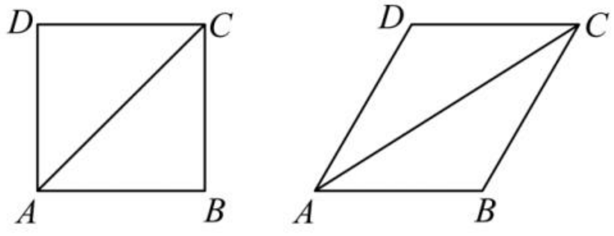


图1　　图2

A. 20cm　　B. $10\sqrt{6}\text{cm}$　　C. $10\sqrt{3}\text{cm}$　　D. $10\sqrt{2}cm$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 直线 $y=-2x+6$ 的截距是______.

8. 方程 $\sqrt{x-2}=3$的解是________.

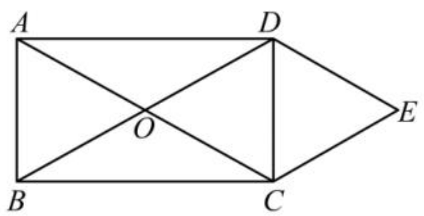
9. 如果一次函数 $y=(3m-2)x+1$ 的图象经过 $A(1,8)$，那么 m 的值是______.

10. 已知一次函数 $y=2x+m-1$ 的图象与 y 轴的交点在负半轴上，那么 m 的取值范围是______.

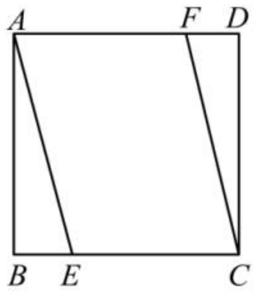
11. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x}=2$，如果设 $y=\frac{x}{x^2-1}$，那么原方程可以化为关于 y 的整式方程为______.

12. 如果一个正多边形每一个内角都等于$144°$，那么这个正多边形的内角和是______.

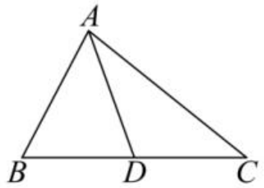
13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，对角线 AC 与 BD 交于点 O，且 $\angle AOD=120°$，$DE\,//\,OC$，$CE\,//\,OD$，则四边形 $OCED$ 的周长为______.



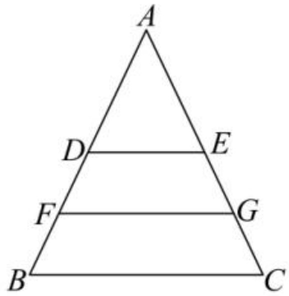
14. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC 和 AD 边上，$BE=2$，$AF=6$，$AE\,//\,CF$，则$\triangle ABE$ 的面积为______.



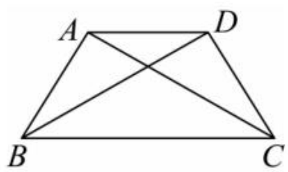
15. 如图，在$\triangle ABC$中，D是边BC的中点，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{AD}$为______.



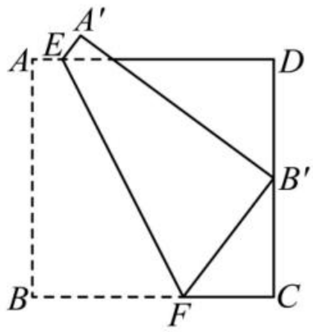
16. 如图，在$\triangle ABC$中，D、E分别是边AB、AC的中点，F、G分别是DB、EC的中点，如果$DE=3$，那么$FG=$______.



17. 如图，在梯形$ABCD$中，$AD\,//\,BC$，$AB=CD$，$\angle DBC=30^\circ$．如果梯形的中位线长为6，那么BD的长为______.



18. 如图，已知正方形$ABCD$的边长为4，点E、F分别在边AD、BC上，将正方形沿着EF翻折，点B恰好落在CD边上的点B'处，若四边形$ABFE$的面积为6，则线段DE的长为__________.



三、解答题：（本大题共 7 题，满分 64 分）

19. 解方程：$\frac{2}{x-3}+1=\frac{5}{x^2-9}$.

20. 解方程组：$\begin{cases} x+2y=8① \\ x^2-3xy+2y^2=0② \end{cases}$

21. 一只箱子里放有 2 个白球与 1 个红球，它们除颜色外均相同.

（1）如果从箱子中任意摸出一个球，摸出的球是白球的概率是______；

（2）如果从箱子中任意摸出一个球，不将它放回箱子，再摸出一个球，利用树形图求两次摸出的球都是白球的概率；

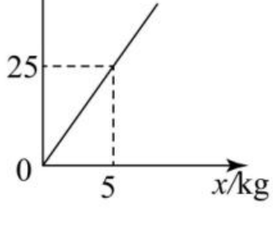
（3）如果可以往箱子里放除颜色外均相同的球，请你设计一个“摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$”的游戏方案.

22. 某食品公司产销一种食品，已知每月的生产成本 y_1 与产量 x 之间是一次函数关系，函数 y_1 与自变量 x（kg）的部分对应值如下表：

x（单位：kg）	10	20	30
y_1（单位：/元）	3030	3060	3090

（1）求 y_1 与 x 之间的函数关系式；

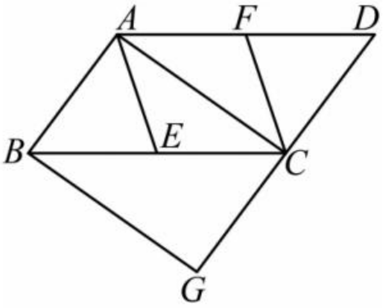
（2）经过试销发现，这种食品每月的销售收入 y_2（元）与销量 x（kg）之间满足如图所示的函数关系



① y_2 与 x 之间的函数关系式为_____；

②假设该公司每月生产的该种食品均能全部售出，那么该公司每月至少要生产该种食品多少kg，才不会亏损？

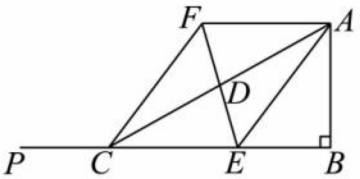
23. 如图，在▱$ABCD$中，E、F分别是边BC、AD的中点，连接AE、CF，AC平分$\angle DAE$．



（1）求证：四边形$AECF$是菱形；

（2）过点B作BG与DC的延长线交于点G，且$\angle GBC=\angle CAE$．求证：四边形$ABGC$是矩形．

24. 如图，已知$\angle ABP=90°$，$AB=8$，点C、E在射线BP上（点C、E不与点B重合且点C在点E的左侧），连接AC、AE，D为AC的中点，过点C作$CF\parallel AE$，交ED的延长线于点F，连接AF．



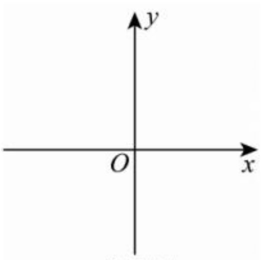
备用图

（1）求证：四边形$ABCF$是梯形；

（2）如果$CE=5$，当$\triangle CDE$为等腰三角形时，求BC的长．

25. 已知直线$y=kx+b$（其中$kb\neq 0$），我们把直线$y=bx+k$称为直线$y=kx+b$的"轮换直线"．例如：直线$y=3x+2$的"轮换直线"是直线$y=2x+3$．

在平面直角坐标系xOy中，已知直线l_1：$y=x+m\left(m\neq 1\right)$的"轮换直线"是直线$l_2$，$l_1$交$y$轴于点A，$l_2$交$y$轴于点$B$，$l_1$和$l_2$相交于点$M$．



备用图

（1）如果直线l_1经过点$\left(-1,-3\right)$．

①求直线 l_1、l_2 的表达式和点 M 的坐标；

②点 N 是平面内一点，如果四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，且 $AM // BN$，求点 N 的坐标.

（2）将 AM 绕点 A 顺时针旋转 $90°$，点 M 的对应点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上．小明说："直线 l_3 一定经过一个定点．" 你认为他的说法是否正确？如果正确，请求这个定点；如果不正确，请说明理由.

虹口区 2023 学年度第二学期初二年级期末学生学习诊断练习

数学 练习卷（答案解析）

（满分 100 分，时间 90 分钟）

注意：

1.本练习卷含三个大题，共 25 题．答题时，请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本练习卷上答题一律无效．

2.除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤．

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）［下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上．］

1. 下列四个函数中，一次函数是（　　）

A. $y=x^2-2x$　　B. $y=2x-1$　　C. $y=\frac{1}{x}+3$　　D. $y=\sqrt{x}+1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一次函数的定义，掌握一次函数的定义是解题的关键．依据一次函数的定义进行解答即可，一次函数的定义：一般地，形如 $y=kx+b$（$k\neq 0$，k、b 是常数）的函数，叫做一次函数．

【详解】解：A、$y=x^2-2x$，自变量 x 的最高次数为 2，不是一次函数，故 A 错误；

B、$y=2x-1$，是一次函数，故 B 正确；

C、$y=\frac{1}{x}+3$，自变量 x 的最高次数为 -1，不是一次函数，故 C 错误；

D、$y=\sqrt{x}+1$ 中，自变量次数不为 1，不是一次函数，故 D 错误．

故选：B．

2. 已知一次函数 $y=(3-m)x+3$，如果函数值 y 随 x 增大而减小，那么 m 的取值范围是（　　）

A. $m>3$　　B. $m<3$　　C. $m\geq 3$　　D. $m\leq 3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与系数的关系．根据一次函数 $y=(3-m)x+3$ 的增减性列出不等式 $3-m<0$，通过解该不等式即可求得 m 的取值范围．

【详解】解：由题意得 $3-m<0$，

解得 $m>3$．

故选：A．

3．下列事件中，必然事件是（　　）

A．上海明天太阳从西边升起

B．任意选取两个非零实数，它们的积为正

C．抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面朝上

D．在平面内画一个平行四边形，它的内角和等于 360 度

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了随机事件，不可能事件，必然事件的概念．必然事件：必然事件指在一定条件下一定发生的事件；不可能事件：在一定条件下不可能发生的事件叫不可能事件；随机事件：随机事件是在随机试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件叫做随机事件(简称事件)；根据必然事件，不可能事件，随机事件的概念可区别各类事件．

【详解】解：A、上海明天太阳从西方升起是不可能事件，不符合题意；

B、任意选取两个非零实数，它们的积为正是随机事件，不符合题意；

C、抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面朝上是随机事件，不符合题意；

D、在平面内画一个平行四边形，它的内角和等于 360 度是必然事件，符合题意；

故选：D．

4．下列方程中，有实数解的是（　　）

A．$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$　　B．$x^2+1=0$　　C．$\sqrt{x^2-1}=0$　　D．$\frac{1}{x^2+1}=0$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了分式方程、平方的非负性、二次根式的性质等知识，分别解方程和利用二次根式的性质进行计算后，即可得到答案．

【详解】解：A．$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$

去分母得，$x=1$，

当 $x=1$ 时，$x-1=0$，

则 $x=1$ 是增根，原分式方程无解，

故选项不符合题意；

B．$x^2+1=0$，

则 $x^2=-1<0$，

∴原方程没有实数根，

故选项不符合题意；

C．$\sqrt{x^2-1}=0$

则 $x^2-1=0$，

解得 $x=\pm 1$，

故选项有实数解，符合题意；

D．$\frac{1}{x^2+1}=0$，

∵ $x^2+1>0$，

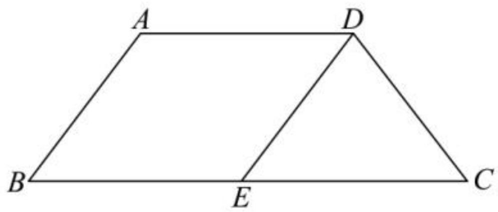
∴ $\frac{1}{x^2+1}>0$，

即原方程没有实数解，

故选项不符合题意．

故选：C．

5. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，点 E 是边 BC 的中点，连接 DE，$DE \parallel AB$，下列向量中，不是 $\overrightarrow{AD}$ 的相反向量的是（　　）



A．$\overrightarrow{DA}$　　B．$\overrightarrow{EB}$　　C．$\overrightarrow{CE}$　　D．$\overrightarrow{BC}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平面向量，平行四边形的性质，平行向量，相反向量等知识，解题的关键是平行向量，相反向量的定义，属于中考常考题型．根据相反向量，平行向量的定义一一判断即可．

【详解】解：A、$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 是相反的向量，本选项不符合题意；

B、$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 是相反的向量，本选项不符合题意．

C、$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 互为相反向量，本选项不符合题意．

D、$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$是平行向量，方向相同，不是相反向量，本选项符合题意．

故选：D．

6. 小明用四根相同长度的木条制作了一个正方形学具（如图 1），测得对角线 $AC=10\sqrt{2}\text{cm}$，将正方形学具变形为菱形（如图 2），$\angle DAB=60°$，则图 2 中对角线 AC 的长为（　　）

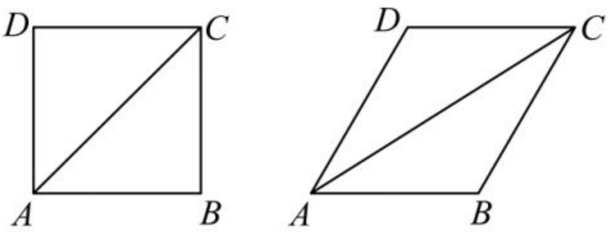


图1　　　　图2

A. 20cm　　　　B. $10\sqrt{6}\text{cm}$　　　　C. $10\sqrt{3}\text{cm}$　　　　D. $10\sqrt{2}cm$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质，菱形的性质，勾股定理．熟练掌握特殊平行四边形的性质是解题关键．由正方形的性质可求出 $AB=AD=10\text{cm}$，当四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB=60°$ 时，连接 BD 交 AC 于 O，可得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，则 $BD=10\text{cm}$，进而得到 $BO=\frac{1}{2}BD=5\text{cm}$，由勾股定理可求出 AO，进而可求出 AC．

【详解】解：如图 1，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$AC=10\sqrt{2}\text{cm}$，

$\therefore AB=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=10\text{cm}$，

在图 2 中，连接 BD 交 AC 于 O，

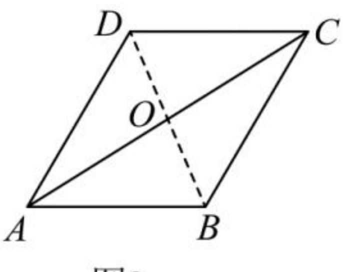


图2

$\because \angle DAB=60°$，$AB=AD=10\text{cm}$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，则 $BD=10\text{cm}$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BO=\frac{1}{2}BD=5\text{cm}$，$AO=CO$，$AC\perp BD$，

$\therefore AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}(\text{cm})$，

$\therefore AC=2AO=10\sqrt{3}(\text{cm})$，

故选：C．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 直线 $y=-2x+6$ 的截距是______．

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征．代入 $x=0$，求出 y 的值，即可得到答案．

【详解】解：令 $x=0$，则 $y=-2\times0+6=6$，

故直线 $y=-2x+6$ 的截距是 6，

故答案为：6．

8. 方程 $\sqrt{x-2}=3$的解是________．

【答案】x=11

【解析】

【分析】把方程两边平方，再解整式方程，然后进行检验确定原方程的解．

【详解】解：两边平方得 x-2=9，解得 x=11，

经检验 x=11 为原方程的解．

故答案为 x=11．

【点睛】本题考查了无理方程：解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法． 常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等． 用乘方法（即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号）来解无理方程，往往会产生增根，应注意验根．

9. 如果一次函数 $y=(3m-2)x+1$ 的图象经过 $A(1,8)$，那么 m 的值是______．

【答案】3

【解析】

【分析】本题主要考查了求一次函数解析式，熟知待定系数法求一次函数解析式是解题的关键．直接把

$A(1,8)$ 代入到一次函数解析式中求出 m 的值即可．

【详解】解：根据题意得：$8=(3m-2)+1$

解得：$m=3$，

故答案为：3．

10. 已知一次函数 $y=2x+m-1$ 的图象与 y 轴的交点在负半轴上，那么 m 的取值范围是______．

【答案】$m<1$##$1>m$

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点，熟知 y 轴上点的坐标特点是解答此题的关键．根据一次函数 $y=2x+m-1$ 的图象与 y 轴的交点在负半轴上，可得出 $m-1<0$，求出 m 的取值范围即可．

【详解】解：根据题意得：$m-1<0$，

解得：$m<1$，

故答案为：$m<1$．

11. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x}=2$，如果设 $y=\frac{x}{x^2-1}$，那么原方程可以化为关于 y 的整式方程为______．

【答案】$3y^2-2y-1=0$

【解析】

【分析】利用换元法，进行转化，再将分式方程转化为整式方程即可．

【详解】解：设 $y=\frac{x}{x^2-1}$，

则原方程化为：$3y-\frac{1}{y}=2$，

去分母，得：$3y^2-1=2y$，即：$3y^2-2y-1=0$；

故答案为：$3y^2-2y-1=0$．

【点睛】本题考查换元法解分式方程．熟练掌握换元法，以及将分式方程转化为整式方程的方法，是解题的关键．

12. 如果一个正多边形每一个内角都等于$144°$，那么这个正多边形的内角和是______．

【答案】$1440°$##1440 度

【解析】

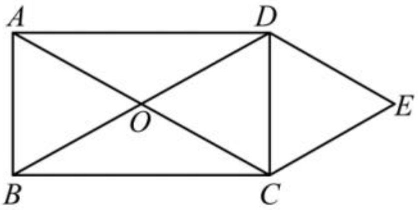
【分析】本题主要考查了多边形的外角和定理和内角和公式，正多边形的每一个内角都等于$144°$，则每个外角是$180°-144°=36°$，外角和是$360°$，则可以求得这个多边形的边数，再根据边数即可求得内角和.

【详解】解：这个多边形的边数是$360°\div(180°-144°)=360°\div36°=10$，

则内角和是$(10-2)\times180°=1440°$，

故答案为：$1440°$.

13. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=2$，对角线AC与BD交于点O，且$\angle AOD=120°$，$DE\parallel OC$，$CE\parallel OD$，则四边形$OCED$的周长为______.



【答案】8

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的性质、等边三角形的判定与性质、菱形的判定与性质，根据$\angle AOD=120°$、矩形的性质、等边三角形的判定，推理证明$\triangle AOB$是等边三角形，得出$OC=OD=2$，结合$DE\parallel OC$，$CE\parallel OD$，菱形的判定定理证明四边形$OCED$是菱形，计算周长即可，熟练掌握矩形的性质、等边三角形的判定与性质、菱形的判定与性质，推理证明是解题的关键.

【详解】解：∵在矩形$ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，$DE\parallel OC$，$CE\parallel OD$，

∴$OA=OB=OC=OD$，$\angle AOB=180°-\angle AOD=180°-120°=60°$，

四边形$OCED$是平行四边形，

∴$\triangle AOB$是等边三角形，

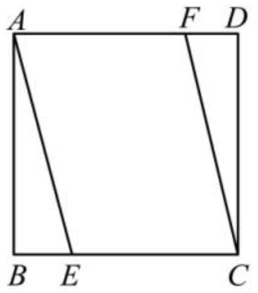
∴$AB=OA=OB=OC=OD=2$，

∴四边形$OCED$是菱形，

∴四边形$OCED$的周长$=2\times4=8$，

故答案为：8.

14. 如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC和AD边上，$BE=2$，$AF=6$，$AE\parallel CF$，则$\triangle ABE$的面积为______.



【答案】8

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质，平行四边形的性质与判定，先根据正方形的性质得到 $AD // BC$，$AB = CE$，$AB \perp BC$，进而证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，得到 $AF = CE = 6$，则 $AB = BC = BE + CE = 8$，最后根据三角形面积计算公式求解即可．

【详解】解：$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD // BC$，$AB = CB$，$AB \perp BC$，

$\because AE // CF$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形，

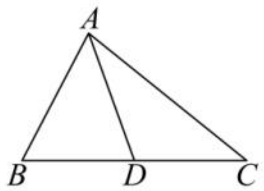
$\therefore AF = CE = 6$，

$\therefore AB = BC = BE + CE = 8$，

$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$，

故答案为：8．

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 的中点，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 为______．

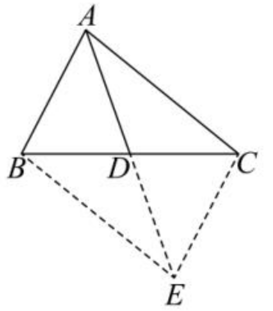


【答案】$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查平面向量，平行四边形的判定和性质，三角形法则等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造平行四边形解决问题，属于中考常考题型．如图，延长 AD 到 E，使得 $DE = AD$，连接 BE，CE．证明四边形 $ABEC$ 是平行四边形，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AE}$ 即可解决问题．

【详解】解：如图，延长 AD 到 E，使得 $DE = AD$，连接 BE，CE．



$\because AD = DE$， $BD = CD$，

$\therefore$四边形 $ABEC$ 是平行四边形，

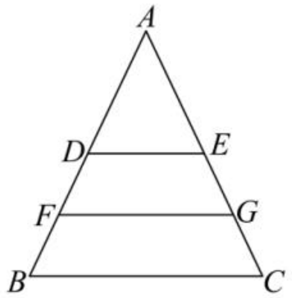
$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} = \vec{b}$，

$\because \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

故答案为$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

16. 如图，在$\triangle ABC$中，D、E分别是边AB、AC的中点，F、G分别是DB、EC的中点，如果$DE = 3$，那么$FG =$______.



【答案】$\frac{9}{2}$##$4\frac{1}{2}$## 4.5

【解析】

【分析】本题考查了三角形的中位线及梯形的中位线，熟练掌握两个定理是解题的关键．根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出$BC = 2DE = 6$，再根据梯形的中位线平行于两底边并且等于两底和的一半求解即可．

【详解】解：$\because$在$\triangle ABC$中，D、E分别是边AB、AC的中点，

$\therefore DE$是$\triangle ABC$的中位线，

$\because DE = 3$，

$\therefore BC = 2DE = 6$，

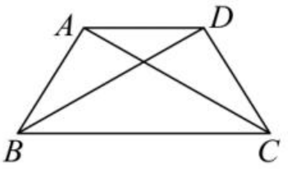
$\because$在梯形$BCED$中，F、G分别是DB、EC的中点，

$\therefore FG$ 是梯形 $BCED$ 的中位线，

\ $FG=\frac{(DE+BC)}{2}=\frac{9}{2}$，

故答案为：$\frac{9}{2}$．

17. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=CD$，$\angle DBC=30^{\circ}$．如果梯形的中位线长为 6，那么 BD 的长为______．

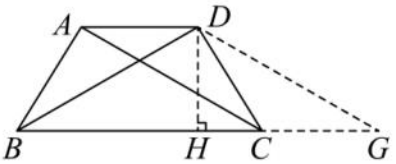


【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】以 AD, AC 为边在 CD 右侧作平行四边形 $ACGD$，过点 D 作 $DH\perp BC$，垂足为 H，由梯形中位线的性质，得到 $BG=12$，根据含 30 度角的直角三角形的特征及等腰三角形的性质，得到 $DH=\frac{1}{2}BD$，$BH=6$，利用勾股定理即可求解．

【详解】解：以 AD, AC 为边在 CD 右侧作平行四边形 $ACGD$，过点 D 作 $DH\perp BC$，垂足为 H，



$\because AD\parallel BC$，

\ B, C, G 三点共线，

$\because$ 梯形的中位线长为 6，

\ $\frac{AD+BC}{2}=6$，

$\because AD=CG$，

\ $BC+CG=12$，

$\because$ �DBC　30靶　$DHB=90$　，

$\therefore DH=\frac{1}{2}BD$，

$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，

$\therefore$梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，

\ Ð ACB = Ð $DBC = 30^{\circ}, AC = BD$，

$\therefore BD = DG$，

$\because DH \perp BC$，

$\therefore BH = 6$，

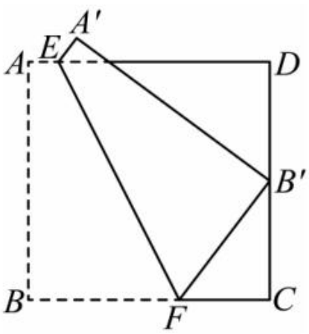
$\therefore BD^2 = BH^2 + DH^2$，即 $\frac{3}{4}BD^2 = 36$，

$\therefore BD = 4\sqrt{3}$（负值舍去），

故答案为：$4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了等腰梯形的性质，梯形中位线的性质，等腰三角形的性质，含 30 度角的直角三角形的特征，勾股定理，熟练掌握梯形的性质是解题的关键.

18. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E、F 分别在边 AD 、BC 上，将正方形沿着 EF 翻折，点 B 恰好落在 CD 边上的点 B' 处，若四边形 $ABFE$ 的面积为 6，则线段 DE 的长为__________.

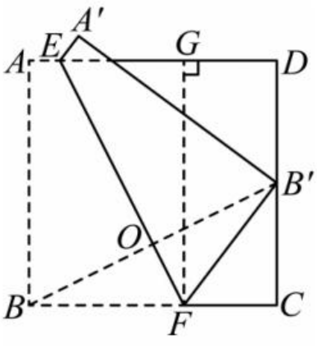


【答案】$\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，图形翻折的特征，矩形的判定和性质，三角形全等判定和性质，勾股定理，作出合理的辅助线是解决问题的关键. 连接 BB' 交 EF 于 O，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G . 根据四边形 $ABFE$ 的面积为 6，得到 $AE + BF = 3$，设 $AE = x$，利用翻折特征，得到 $BB' \perp EF$，证明 $\triangle EGF \cong \ B'CB$，依次得到 $B'C = EG = 3 - 2x$，$B'F = 3 - x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle FB'C$ 利用勾股定理即可解决问题.

【详解】解：连接 BB' 交 EF 于 O，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G，如图所示，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是梯形，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 的面积为 $S_{四边形ABFE}=\frac{1}{2}(AE+BF)\bullet AB=6$，又 $AB=4$，

$\therefore$ $AE+BF=3$，

设 $AE=x$，则 $BF=3-x$，$FC=BC-BF=4-(3-x)=1+x$，

$\because$ $AD\parallel BC$，$FG\perp AD$，$\angle C=\angle D=90^{\circ}$，

$\therefore$ 四边形 $GDCF$ 为矩形，

$\therefore$ $GD=FC=1+x$，

$\therefore$ $EG=AD-AE-GD=4-x-(1+x)=3-2x$，

$\because$ 四边形 $GDCF$ 为矩形，

$\therefore$ $\angle EFB+\angle EFG=90^{\circ}$，

$\because$ 点 B' 是点 B 沿着 EF 的翻折点，

$\therefore$ $BB'\perp EF$，

$\therefore$ $\angle B'BC+\angle EFB=90^{\circ}$，

$\therefore$ $\angle EFG=\angle B'BC$，又 $FG=CD=BC$，$\angle EGF=\angle B'CB=90^{\circ}$，

$\therefore$ $\triangle EGF\cong B'CB$，

$\therefore$ $B'C=EG=3-2x$，

在 $Rt\triangle FB'C$ 中，根据翻折特征，$B'F=BF=3-x$，利用勾股定理得，

$B'F^{2}=B'C^{2}+FC^{2}$，即 $(3-x)^{2}=(3-2x)^{2}+(1+x)^{2}$，

解得 $x=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ $DE=AD-AE=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，

故答案为：$\frac{7}{2}$.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 64 分）

19. 解方程：$\frac{2}{x-3}+1=\frac{5}{x^2-9}$.

【答案】方程的解是 $x_1=-4$，$x_2=2$.

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，先去分母将分式方程化为整式方程，解整式方程并检验，即可得出答案.

【详解】解：去分母得 $2(x+3)+x^2-9=5$，

整理得 $x^2+2x-8=0$，即 $(x+4)(x-2)=0$，

解得 $x_1=-4$，$x_2=2$，

经检验 $x_1=-4$，$x_2=2$ 都是原方程的解.

故方程的解是 $x_1=-4$，$x_2=2$.

20. 解方程组：$\begin{cases}x+2y=8① \\ x^2-3xy+2y^2=0②\end{cases}$

【答案】$\begin{cases}x_1=4 \\ y_1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3}\end{cases}$

【解析】

【分析】本题考查了二元二次方程组解法，由①可得，$x=8-2y③$，将③代入②得 $3y^2-14y+16=0$，求出 $y_1=2$，$y_2=\frac{8}{3}$，然后代入 $x=8-2y③$ 求解即可.

【详解】$\begin{cases}x+2y=8① \\ x^2-3xy+2y^2=0②\end{cases}$

由①可得，$x=8-2y③$

将③代入②得，$(8-2y)^2-3\times(8-2y)y+2y^2=0$

整理得，$3y^2-14y+16=0$

$(y-2)(3y-8)=0$

$y-2=0$ 或 $3y-8=0$

解得 $y_1=2$， $y_2=\frac{8}{3}$

将 $y_1=2$ 代入③得， $x_1=8-2y=4$；

将 $y_2=\frac{8}{3}$ 代入③得， $x_2=8-2y=\frac{8}{3}$.

∴方程组的解为 $\begin{cases}x_1=4\\y_1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\frac{8}{3}\\y_2=\frac{8}{3}\end{cases}$.

21. 一只箱子里放有 2 个白球与 1 个红球，它们除颜色外均相同.

（1）如果从箱子中任意摸出一个球，摸出的球是白球的概率是______；

（2）如果从箱子中任意摸出一个球，不将它放回箱子，再摸出一个球，利用树形图求两次摸出的球都是白球的概率；

（3）如果可以往箱子里放除颜色外均相同的球，请你设计一个“摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$ ”的游戏方案.

【答案】（1） $\frac{2}{3}$

（2） $\frac{1}{3}$

（3）往箱子里放红球 1 个，白球 1 个，摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了用概率公式求解概率、采用树状图法或列表法列举求解概率以及根据概率求数量的知识，掌握用树状图法或列表法列举求解概率是解答本题的关键.

（1）用白球个数除以球的总个数即可；

（2）画树状图展示所有 6 种等可能的结果数，再找出两次摸出的球都是白球的结果数，然后根据概率公式求解；

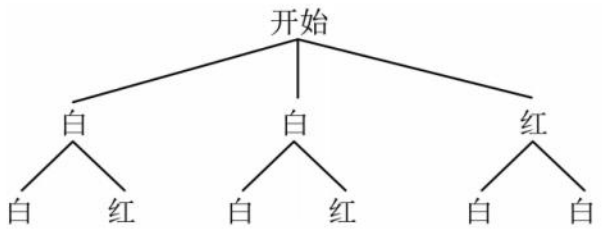
（3）设往箱子里放红球 x 个，白球 1 个，根据“摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$ ”建立方程求解检验即可.

【小问 1 详解】

解：摸出的球是白球的概率是 $2\div(2+1)=\frac{2}{3}$；

【小问 2 详解】

解：画树状图为：



共有 6 种等可能的结果数，其中两次摸出的球都是白球的结果数为 2，

即两次都是摸出白球的概率为：$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；

【小问 3 详解】

解：设往箱子里放红球 x 个，白球 1 个，根据题意得：

$\frac{2+1}{3+1+x}=\frac{3}{5}$，即 $15=12+3x$

解得：$x=1$，

经检验 $x=1$，是原方程的解，

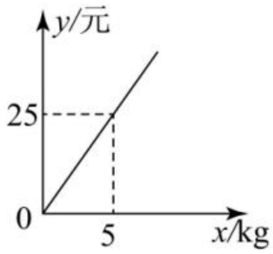
∴往箱子里放红球 1 个，白球 1 个，摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$

22. 某食品公司产销一种食品，已知每月的生产成本 y_1 与产量 x 之间是一次函数关系，函数 y_1 与自变量 x（kg）的部分对应值如下表：

x（单位：kg）	10	20	30
y_1（单位：/元）	3030	3060	3090

（1）求 y_1 与 x 之间的函数关系式；

（2）经过试销发现，这种食品每月的销售收入 y_2（元）与销量 x（kg）之间满足如图所示的函数关系



① y_2 与 x 之间的函数关系式为_____；

②假设该公司每月生产的该种食品均能全部售出，那么该公司每月至少要生产该种食品多少 kg，才不会亏损？

【答案】（1） $y_1=3x+3000$

（2）① $y_2=5x$，②每月至少要生产该种食品1500kg，才不会亏损

【解析】

【分析】（1）由图，已知两点，可根据待定系数法列方程，求函数关系式．

（2）利用利润问题中的等量关系解决这个问题．

【小问1详解】

解：设 $y_1=kx+b$，由已知得：

$$\begin{cases}10k+b=3030\\20k+b=3060\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}k=3\\b=3000\end{cases}$．

给所求的函数关系式为 $y_1=3x+3000$．

【小问2详解】

解：①设 $y_2=mx$，

根据函数关系图得出：$25=5m$，

得出：$m=5$，

所以：$y_2=5x$，

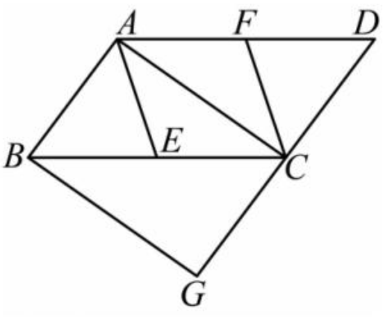
②由 $y_1=y_2$，得：$5x=3x+3000$，

解得 $x=1500$．

答：每月至少要生产该种食品1500kg，才不会亏损．

【点睛】本题考查一次函数的应用，正确得出解析式是解题的关键．

23. 如图，在▱$ABCD$中，E、F分别是边BC、AD的中点，连接AE、CF，AC平分$\angle DAE$．



（1）求证：四边形$AECF$是菱形；

（2）过点 B 作 BG 与 DC 的延长线交于点 G，且 $\angle GBC=\angle CAE$．求证：四边形 $ABGC$ 是矩形．

【答案】（1）证明见详解

（2）证明见详解

【解析】

【分析】（1）利用中点和平行四边形的性质证明 $AF=EC, AF\parallel EC$，所以四边形 $AECF$ 是平行四边形，由 AC 平分 $\angle DAE$、$AF\parallel EC$，可证 $\angle EAC=\angle ACE$，故 $AE=CE$，则结果证；

（2）由（1）知 $AE=CE, \angle EAC=\angle ACE$，结合 $\angle GBC=\angle CAE$，可得 $AC/\!/BG$，在 $\text{Y}\ ABCD$ 中 $AB/\!/CG$，则四边形 $ABGC$ 是平行四边形，连接 EG，证明 $AG=BC$，则结果得证．

【小问 1 详解】

解：$\because E$、F 分别是 BC、AD 的中点，

$\therefore AF=\frac{1}{2}AD, EC=\frac{1}{2}BD$，

又$\because$在 $\text{Y}\ ABCD$ 中，$AD=BC$，且 $AD/\!/BC$，

$\therefore AF=EC, AF\parallel EC$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$\because AC$ 平分 $\angle DAE$，

$\therefore \angle EAC=\angle FAC$，

$\because AF\parallel EC$，

$\therefore \angle FAC=\angle ACE$，

$\therefore \angle EAC=\angle ACE$，

$\therefore AE=CE$，

四边形 $AECF$ 是菱形．

【小问 2 详解】

由（1）知 $AE=CE, \angle EAC=\angle ACE$，

又$\because \angle GBC=\angle CAE$，

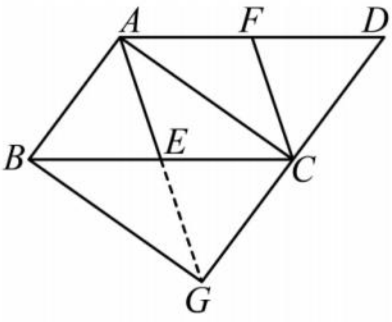
$\therefore \angle GBC=\angle ACE$，

$\therefore AC\parallel BG$，

又$\because$在 $\text{Y}\ ABCD$ 中 $AB/\!/CD$ 即 $AB/\!/CG$，

$\therefore$四边形 $ABGC$ 是平行四边形，

连接 EG，如图



$\because E$ 是 BC 中点，

$\therefore E$ 即为对角线 AG、BC 的交点，

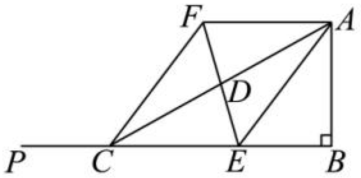
$\therefore AE = CE$ 即 $\frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}BC$，

$\therefore AG = BC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【点睛】本题考查菱形的判定、平行四边形的判定和性质、等腰三角形的性质，矩形的判定，熟悉相关性质、性质定理是解题关键.

24. 如图，已知 $\angle ABP = 90°$，$AB = 8$，点 C、E 在射线 BP 上（点 C、E 不与点 B 重合且点 C 在点 E 的左侧），连接 AC、AE，D 为 AC 的中点，过点 C 作 $CF \parallel AE$，交 ED 的延长线于点 F，连接 AF.



备用图

（1）求证：四边形 $ABCF$ 是梯形；

（2）如果 $CE = 5$，当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时，求 BC 的长.

【答案】（1）见解析　（2）6 或 16

【解析】

【分析】（1）证明 $\triangle AED \cong \triangle CFD(\text{ASA})$，进而证明四边形 $AFCE$ 是平行四边形，得到 $AF \parallel CE$，进而得到 $AF \parallel BC$，根据 $CF \parallel AE$，AB 与 AE 相交，得到 AB 与 CF 不平行，即可证明四边形 $ABCF$ 是梯形；

（2）分 $CE = CD = 5$，$CE = DE = 5$，$CE = CD = DE = 5$，三种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

证明：$\because CF \parallel AE$，

$\therefore \angle DAE = \angle DCF$，

$\because D$为AC的中点，

$\therefore AD=CD$，

$\because \angle ADE=\angle CDF$，

$\therefore \triangle AED\cong\triangle CFD(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AE=CF$，

$\therefore$四边形$AFCE$是平行四边形，

$\therefore AF\parallel CE$，即$AF\parallel BC$，

$\because CF\parallel AE$，AB与AE相交，

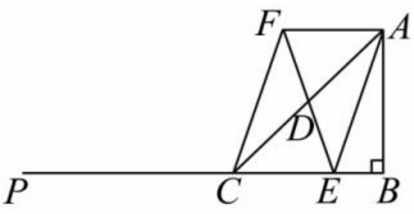
$\therefore AB$与CF不平行，

$\therefore$四边形$ABCF$是梯形；

【小问2详解】

解：$\because \triangle CDE$为等腰三角形，

如图，当$CE=CD=5$时，



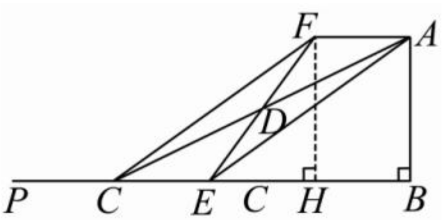
$\because D$为AC的中点，

$\therefore AC=10$，

$\because \angle ABP=90^\circ$，$AB=8$，

\ $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=6$；

如图，当$CE=DE=5$时，过点F作$FH\perp BP$，垂足为H，



由（1）知四边形$AFCE$是平行四边形，

$\therefore DF=DE=5$，即$EF=10$，

$\because \angle ABP=90^\circ$，$FH\perp BP$，

$\therefore FH\parallel AB$，

∵ $AF \parallel BP$，

∴四边形 $AFHB$ 是平行四边形，

∵ $\angle ABP = 90°$，

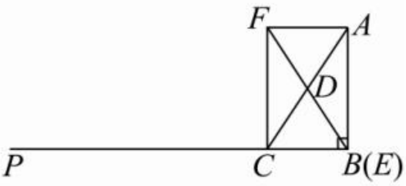
∴四边形 $AFHB$ 是矩形，

\ $AF = BH = CE = 5, AB = FH = 8$，

\ $EH = \sqrt{EF^2 - FH^2} = 6$，

∴ $BC = CE + EH + BH = 6$；

如图，当 $CE = CD = DE = 5$ 时，



∵ $\triangle CED$ 是等边三角形，

∴ $\angle ACB = 60°$，

∵ $\angle ABP = 90°$，

∴ $\angle CAB = 30°$，

\ $BC = \frac{1}{2}AC = AD = CD = 5$，

Q $CE = 5$，

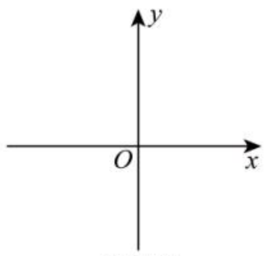
∴此时，点 E 与点 B 重合，不符合题意，

综上，当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时，BC 的长为 6 或 16.

【点睛】本题考查梯形的判定，平行四边形的判定与性质，三角形全等的判定与性质，等腰三角形的性质，勾股定理，直角三角形的特征，灵活运用平行四边形的性质是解题的关键.

25. 已知直线 $y = kx + b$（其中 $kb \neq 0$），我们把直线 $y = bx + k$ 称为直线 $y = kx + b$ 的“轮换直线”．例如：直线 $y = 3x + 2$ 的“轮换直线”是直线 $y = 2x + 3$.

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l_1：$y = x + m\left(m \neq 1\right)$ 的“轮换直线”是直线 l_2，l_1 交 y 轴于点 A，l_2 交 y 轴于点 B，l_1 和 l_2 相交于点 M.



备用图

（1）如果直线 l_1 经过点 $\left(-1,-3\right)$．

①求直线 l_1、l_2 的表达式和点 M 的坐标；

②点 N 是平面内一点，如果四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，且 $AM\mathbin{/\mkern-6mu/}BN$，求点 N 的坐标．

（2）将 AM 绕点 A 顺时针旋转 $90°$，点 M 的对应点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上．小明说："直线 l_3 一定经过一个定点．"你认为他的说法是否正确？如果正确，请求这个定点；如果不正确，请说明理由．

【答案】（1）① $M\left(1,-1\right)$；② $N\left(-2,-1\right)$

（2）正确，直线 l_3 过定点 $\left(0,-1\right)$

【解析】

【分析】（1）①将点 $\left(-1,-3\right)$ 代入 $y=x+m\left(m\neq 1\right)$，求出 m 的值，进而得到直线 l_2 的表达式，联立直线 l_1、l_2 的表达式，即可求出 M 的坐标；②根据四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，且 $AM\mathbin{/\mkern-6mu/}BN$，得到 N 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上，且 $BM=AN$，求出直线 BN 的解析式，设 $N\left(t,t+1\right)$，根据 $BM=AN$，利用两点间距离公式建立方程求解即可；

（2）根据题意得到直线 l_2 的表达式为：$y=mx+1$，求出 $A\left(0,m\right),B\left(0,1\right)$，联立直线 l_1、l_2 的表达式，求出 $M\left(1,1+m\right)$，如图，过点 M,M_1 作 y 轴的垂线，垂足分别为 G,H，证明 $\triangle GAM\cong\triangle HM_1A\left(\text{AAS}\right)$，得到 $M_1\left(1,m-1\right)$，根据点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上，求出直线 l_3 的解析式为：$y=mx-1$，当 $x=0$ 时，$y=-1$，即可得出直线 l_3 过定点 $\left(0,-1\right)$．

【小问 1 详解】

解：①将点 $\left(-1,-3\right)$ 代入 $y=x+m\left(m\neq 1\right)$，则 $-3=-1+m$，

$\therefore m=-2$，

$\therefore$ 直线 l_1 的表达式为：$y=x-2$，

$\therefore$ 直线 l_2 的表达式为：$y=-2x+1$，

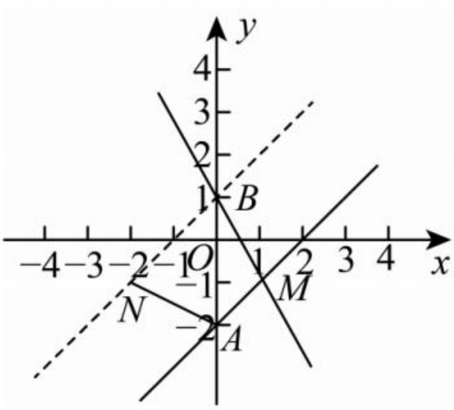
令 $x=0$，则 $y_A=0-2=-2, y_B=-2\times 0+1=1$，

$\therefore A(0,-2), B(0,1)$，

联立直线 l_1、l_2 的表达式，则 $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-2x+1 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$，即 $M(1,-1)$，

②如图，



$\because$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，且 $AM \parallel BN$，

$\therefore N$ 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上，且 $BM=AN$，

设直线 BN 的解析式为 $y=x-n$，

将点 $B(0,1)$ 代入得：$1=0-n$，

解得：$n=-1$，

$\therefore$ 直线 BN 的解析式为 $y=x+1$，

设点 $N(t,t+1)$，

由图形可得 $t<0$，

$\therefore \sqrt{(0-t)^2+\left[-2-(t+1)\right]^2}=\sqrt{(1-0)^2+(-1-1)^2}$，

$\therefore 2t^2+6t+9=5$，

解得：$t=-1$ 或 $t=-2$，

当 $t=-1$ 时，$N(-1,0)$，此时 $BN=\sqrt{(0+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$，$AM=\sqrt{(1-0)^2+\left[(-1)+2\right]^2}=\sqrt{2}$，

$\because AM \parallel BN$，

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是平行四边形，

$\therefore AN \parallel BM$，

则四边形 $AMBN$ 不是梯形，故舍去，

当 $t=-2$，$N(-2,-1)$，

同理：$BN=\sqrt{(0+2)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$，$AM=\sqrt{(1-0)^2+[(-1)+2]^2}=\sqrt{2}$，

$\because AM \parallel BN$，AN 与 BM 不平行，

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，

故 $t=-2$，则 $N(-2,-1)$；

【小问 2 详解】

解：根据题意：直线 l_2 的表达式为：$y=mx+1$，

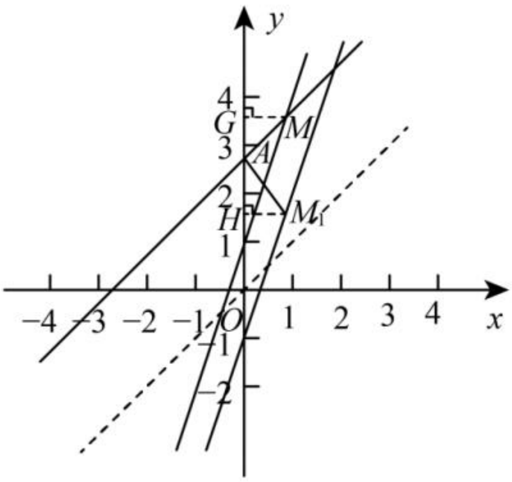
令 $x=0$，则 $y_A=0+m=m, y_B=m' \ 0+1=1$，

$\therefore A(0,m), B(0,1)$，

联立直线 l_1、l_2 的表达式，则 $\begin{cases} y=x+m \\ y=mx+1 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x=1 \\ y=1+m \end{cases}$，即 $M(1,1+m)$，

如图，过点 M, M_1 作 y 轴的垂线，垂足分别为 G, H，



则Ð MGA =Ð $M_1HA=90°$，$G(0,1+m)$，

\ $GM=1, AG=OG-OA=1$，

由旋转的旋转得：$AM=AM_1$，Ð $MAM_1=90°$，

$\because \angle GAM + \angle HAM_1 = \angle GAM + \angle GMA$，

$\therefore \angle HAM_1 = \angle GMA$，

$\therefore \triangle GAM \cong \triangle HM_1A\left(\mathrm{AAS}\right)$，

$\therefore GM = AH = 1, AG = HM_1 = 1$，

$\therefore M_1\left(1, m-1\right)$，

$\because$ 点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上，

设直线 l_3 的解析式为：$y = mx + n$，则 $m - 1 = m + n$，

解得：$n = -1$，

$\therefore$ 直线 l_3 的解析式为：$y = mx - 1$，

当 $x = 0$ 时，$y = -1$，

$\therefore$ 直线 l_3 过定点 $\left(0, -1\right)$．

【点睛】本题考查的是一次函数综合题，旋转的性质，需要掌握待定系数法确定函数关系式,函数图象上点的坐标特征，全等三角形的判定与性质，两条直线平行及交点等相关知识，属新定义型题目．